3人で行うババ抜きの勝敗について

数学班　　川喜田哲都　高橋惇　樋口大智

指導　堀川貴絵

1　目的

2人でババ抜きをした場合、初めにババを持っている人が負けやすいということが京都大学の入試問題で証明されている。そこで3人、4人・・・とババ抜きをする人数を増やしていくと2人でババ抜きをした時と同じように「初めにババを持っている人が負けやすくなるのか」という疑問を持った。ババ抜きは2人でやるときよりも3人以上でやることが多いので、まずは3人でババ抜きをしたときについて調べた。3人でババ抜きをするときの勝敗についての先行研究は、見つけることできず、京都大学の入試問題を参考に研究を進めた。

ババ抜きには様々なローカルルールがあるため、ここで扱うババ抜きのルールを次のように定義した。

＜ババ抜きのルール＞

①カードを配った時点で、カードが一番少ない人をA、Aの右をB、Aの左をCとする

②カードはA→B→Cの順に引く

③同じ番号のカードがそろったら捨てることを繰り返し、カードがなくなった人から勝ちとする

本研究の目的は、上のルールのもとで A、B、C の 3 人でのババ抜きの樹形図を作成し、3 人でババ抜きをする場合も初めにババを持っている人が負けやすいことを証明することである。

2　予備研究

53 枚でババ抜きをしたときの樹形図を作成しようと考えたが、場合分けが多すぎて A、B、C のカードの動きがわかりにくかったので、カードの枚数を 17 枚にして樹形図を作成し、だれが負けるのかを調べその確率を求める。

カードの枚数を 17 枚にした理由は、下のように 53 枚のとき 3 人に配られたカードは 1 人だけ枚数が 1 枚少なくなるので、同様に 1 人だけが 1 枚少なくなるようにしたためである(表1)。

表1　＜初めに配られるカードの枚数＞

	A	B	C
53 枚のとき	17 枚	18 枚	18 枚
17 枚のとき	5 枚	6 枚	6 枚

配られたカードの同じ番号のカードを捨てた時点をスタート時とすると、スタート時の 3 人のカードの合計枚数と A、B、C のカードの配置パターンは次の表のようになる(表 2)。

表2

	スタート時、3 人のカードの合計枚数	A、B、Cの カードの配置パターン
①	1 枚	1 通り
②	3 枚	2 通り
③	5 枚	7 通り
④	7 枚	18 通り
⑤	9 枚	61 通り

まず、枚数が少なく、簡単にできる青で塗りつぶしたところの 1 枚と 3 枚の場合を調べた。

①スタート時、3 人のカードの合計枚数が 1 枚のとき

カードの番号がそろうと 2 枚ずつ捨てられるので、初めに 5 枚(奇数枚)配られる A がその 1 枚(ババ)を持っている。

➡初めにババを持っている A が負ける

②スタート時、3 人のカードの合計枚数が 3 枚のとき

2 通りある A、B、C のカードの配置パターンは、次の(ア)(イ)である(表3)。
〇は数字札　Xはババを示している。

表3

	A	B	C
(ア)	〇		X 〇
(イ)	〇	X 〇	

(ア)のとき

既に B があがっているので、C が A のカードを引くことになるので、初めにババを持っている C が負ける。

(イ)のとき

既に C があがっているので、A が B のカードを引くことになる。A がジョーカーか数字札を引くことになり、それぞれの負ける確率を求めると次のようになる。

Aの負ける確率

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

Bの負ける確率

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Aの負ける確率＜Bの負ける確率

➡初めにババを持っているBが負けやすい

3　仮説

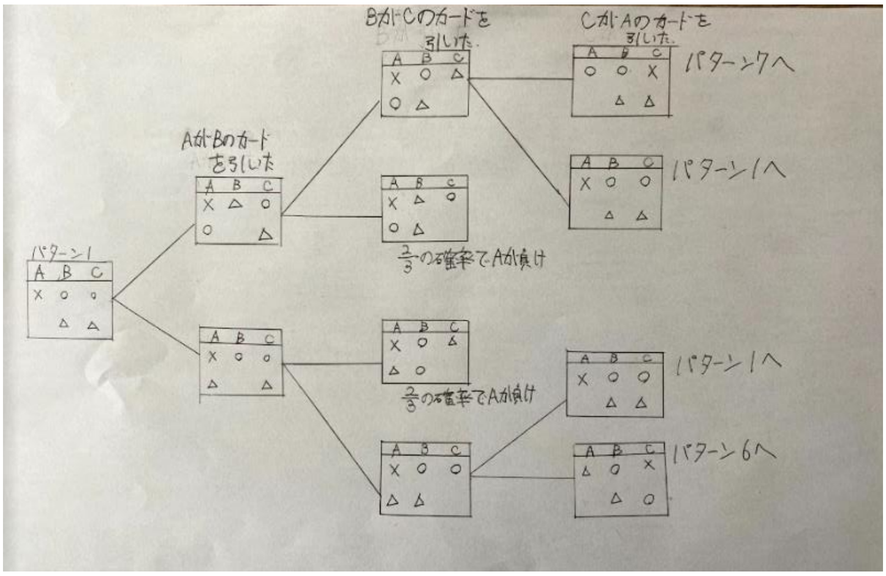
①、②のことからカードの枚数を 17 枚に減らして 3 人でババ抜きをしたとき調べた 2 通りはどちらも初めにババを持っていた人が負けやすいことから、

「初めにババを持っている人が負けやすい」という仮説を立てた。

4　研究手法

(1)予備研究に引き続き、17 枚のカードでババ抜きをしたときに、スタート時の 3 人のカードの合計枚数が5、7、9枚のときについて樹形図(図1)を作成し、規則性を見出し数学的に証明する。

図1＜5 枚のときの樹形図の例＞



(2)53 枚のカードを配るところからババ抜きをシミュレーションするプログラムを python で作成し、試行回数を増やして実験的に調査する。

次のフローチャート(図2)のようなプログラム(図3)を作成した。

図2＜フローチャート＞

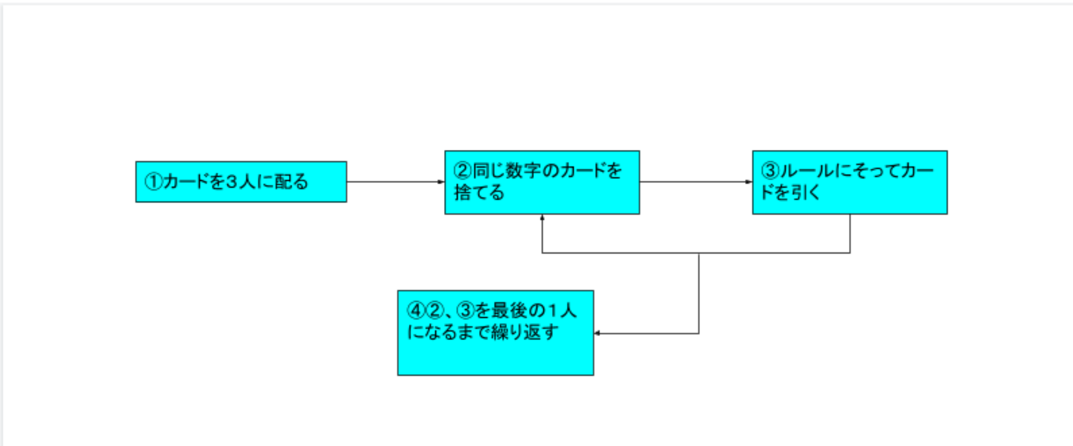


図3＜プログラムの一部＞

```
if i == 1 and A != []:
  if B != []:
    A.append(B.pop())
    new_A = Counter(A)
    A = [k for k,v in new_A.items() if v%2==1]
    A = random.sample(set(A),len(list(set(A))))
  elif C != [] and sysC > 0:
    A.append(C.pop())
    new_A = Counter(A)
    A = [k for k,v in new_A.items() if v%2==1]
    A = random.sample(set(A),len(list(set(A))))
if i == 2 and B != []:
  if C != []:
    B.append(C.pop())
    new_B = Counter(B)
    B = [k for k,v in new_B.items() if v%2==1]
    B = random.sample(set(B),len(list(set(B))))
  elif A != [] and sysC > 0:
    B.append(A.pop())
    new_B = Counter(B)
    B = [k for k,v in new_B.items() if v%2==1]
    B = random.sample(set(B),len(list(set(B))))
if i == 3 and C != []:
  if A != []:
    C.append(A.pop())
    new_C = Counter(C)
    C = [k for k,v in new_C.items() if v%2==1]
    C = random.sample(set(C),len(list(set(C))))
  elif B != [] and sysC > 0:
    C.append(B.pop())
    new_C = Counter(C)
    C = [k for k,v in new_C.items() if v%2==1]
    C = random.sample(set(C),len(list(set(C))))
```

5　結果・考察

＜研究手法(1)について＞

スタート時、3 人のカードの合計枚数が 1 枚と 3 枚の時は既に予備実験でやっているので、スタート時、3 人のカードの枚数が 5 枚のときから調べた。

③スタート時、3 人のカードの合計枚数が 5 枚のとき

ループすることがあるので最短で勝敗が決まるところに着目すると、7 通りある A、B、C のカードの配置パターンは次のようになる(表4)。これら 7 通りそれぞれについての樹形図を作成し、最短で勝敗が決まるときに、負ける人が誰なのか調べた。色を塗っているところが負けた人である。○、△は数字札　Xはババを示す。

表4

	A	B	C
パターン1	● X	○ △	○ △
パターン2	● X ○ △	○ △	
パターン3	● X ○ △		○ △
パターン4	○	X △	○ △
パターン5	△	X ○	○ △
パターン6	○	○ △	● X △
パターン7	△	○ △	● X ○

7 通りのうち●のある 5 通りで、初めにババを持っていた人が負けとなった。

➡最短で勝敗が決まるときに限った場合、仮説は正しい

④スタート時、3 人のカードの合計枚数が 7 枚のとき

⑤スタート時、3 人のカードの合計枚数が 9 枚のとき

7 枚と 9 枚のときは場合分けが 200 通り以上あり、ループすることも多く、2 か月以上継続して樹形図を作成したが、完成することはできなかった。勝敗については、最短で勝敗が決まるところに着目すると初めにババを持っている人が負けやすいという傾向が見られたことから、仮説は正しいと考える。

研究手法(1)から最短で勝敗が決まるときに限った場合、初めにババを持っている人が負けやすいことが分かった。

＜研究手法②について＞

図4は、プログラム(図3)を３回実行した結果である。

1、2 行目…初めにババを持っている人とその人の手札

3 行目…スタート時の A、B、C の手札

4～7 行目…A、B、C の順位　を示す。

図4＜プログラム実行例＞

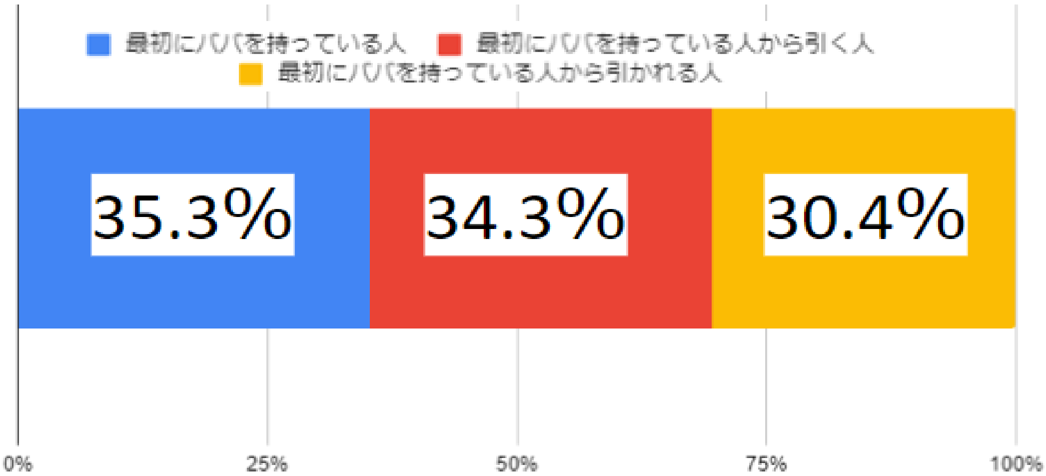
```
0 [3, 0, 12, 2, 4]
A has Jorker
[3, 0, 12, 2, 4] [4, 5, 7, 6, 1, 2, 8, 3] [12, 7, 8, 1, 6, 5]
A 2
B 1
C 3
[] [] [0]
```

```
2 [10, 13, 12, 9, 11, 0, 7, 4]
C has Jorker
[4, 8, 2] [8, 13, 12, 11, 10, 9, 7, 2] [10, 13, 12, 9, 11, 0, 7, 4]
A 1
B 3
C 2
[] [0] []
```

```
0 [2, 13, 11, 10, 12, 0, 3]
A has Jorker
[2, 13, 11, 10, 12, 0, 3] [4, 12, 9, 1, 10, 5] [9, 1, 3, 2, 5, 11, 13, 4]
A 3
B 1
C 2
[0] [] []
```

このプログラムを 1000 万回試行し、実験的に確率を求めた結果、(図5)のようになった。

図5＜初めにババを持っている人と、その人から引く人、引かれる人の負ける確率＞



初めにババを持っている人が負ける確率は 35.3%であった。

1000 万回試行していることからこの結果には有意な差があるといえる。

➡仮説は正しい

また、初めにババを持っている人から引かれる人の負ける確率は 30.4%、すなわち最も勝ちやすいことが示された。これは、初めにババを持っている人から引かれる人は、初めにババを持っている人から直接カードを引かないためだと考えられる。

更に、引く順番が負ける確率に影響を与えるのかを調査するため、次の確率も調べた。
・A（1番目に引く人）、B（2番目に引く人）、C（3番目に引く人）だけに着目した負ける確率（図6）
・A（1番目に引く人）、B（2番目に引く人）、C（3番目に引く人）が、初めにババを持っているときの負ける確率（表5）

図6＜A、B、Cだけに着目した負ける確率＞

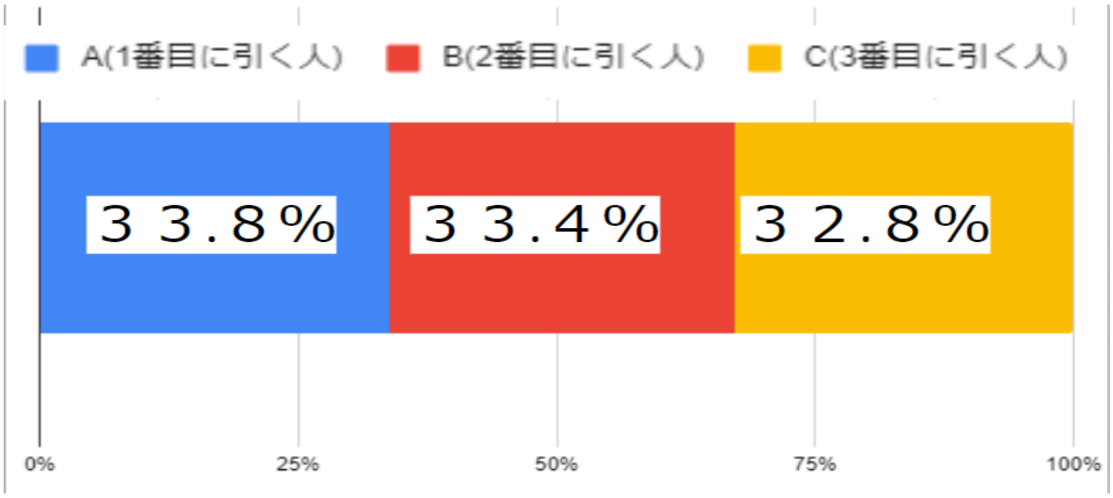


表5＜A、B、Cが、初めにババを持っているときの負ける確率＞

A がババを持っていて負ける確率	36.0%
B がババを持っていて負ける確率	35.1%
C がババを持っていて負ける確率	34.7%

上の結果から、A（1番目に引く人）が一番負けやすく、A、B、C 共に初めにババを持っていると負ける確率が更に高くなることが分かった。

5 まとめ

研究手法(1)からは、カードの流れを追うことで最短で勝敗が決まるときに限った場合初めにババを持っている人が負けやすいことがわかった。しかし、様々なループがあり複雑なため現時点で漸化式を作ることはできず、数学的な証明には至らなかった。研究手法(2)からは、実験的に調べることで、引く順番と初めにババを持っている人に着目して調べ、いずれの場合においても、初めにババを持っている人が負けやすいことが分かった。

6 今後の展望

17 枚のときの樹形図から見出した規則性をパターン化し漸化式を作りたい。また、人数を増やしたときも初めにババを持っている人が負けやすいのかについても調べる。

7 参考文献

聖文新社編集部編(2009)『京都大学 数学入試問題 50 年』