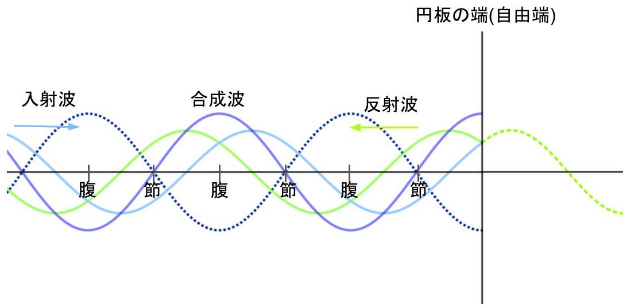
クラドニ図形～音波が作り出す芸術～

物理1班
安杖 侑　相澤 鈴　佐藤 加歩
佐藤 明衣　佐藤 黎惟　百木 健
指導教員　釜田 博一

1　はじめに

　クラドニ図形とは、水平な板の上に砂を置いて特定の周波数を流したとき、砂が音の振動で動いてできた幾何学模様のことである。

　板の上で定常波ができると、定常波の節の部分は振動しないため粒子が集まり、反対に定常波の腹の部分は大きく振動するため粒子が集まりにくくなる。また、板の上では中心の振動源から同心円状に波が伝わるため、砂がそれぞれの波の節に集まり、その結果、板の上で粒子が幾何学模様を形成される。



2　研究の目的

　私たちがクラドニ図形の研究をしようと思ったきっかけは、平成15年度の理数科の先輩方が行ったクラドニ図形の研究を見て、興味を持ったことだ。その研究の結果、円の数と周波数に関係性は見られないということであったが、私たちは、円の数と周波数には何か関係性があるのではないかと思い、自分たちで関係性を見つけるために、クラドニ図形の研究をすることにした。

3　実験方法

　実験にはこれらの道具を使用した。

・ファンクションジェネレーター

任意の周波数と波形を持った交流電圧信号を生成する。

・アンプ(増幅器)

ファンクションジェネレーターで生成した信号の周波の形や特性はそのままに、振幅を拡大する。

・電流計

電流を計測して、一定になるようにする。

・バイブレーター

交流電圧信号を伝えて、プラスチックの円板を振動させる。

・珪砂

なお、形成される図形は砂の質量や形によって変化しないことがわかっている。

＜実験１＞
振動数を０Hzから徐々に上げていき、何らかの図形ができ始めた時の周波数と図形を記録する。再び周波数を上げていき、この手順を繰り返す。
＜実験２＞
実験１と異なり、図形が一番はっきり現れる時の周波数を記録し、理論値と比較する。
＜実験３＞
実験２と同様の手順の上、形成される一番外側と一番内側の円の直径を記録する。

４　結果

　実験１で記録したできた図形とその周波数は表１のようになった。このとき、長方形型の4点の図形(図１)がみられた後、正方形型の4点の図形(図２)、6点の図形(図３)と変化した。また、1重から6重まで1回ずつ円が現れた後、4重となり、再び6重となったのち、5重となったこともあった。
　さらに、みられた点や円の個数とその図形ができ始めた時の周波数をグラフにした。点の数と周波数の関係がグラフ1である。グラフ2では円の数と周波数の関係を示した。

表１

図形	周波数[Hz]
4点（長方形）	61
1重（1回目）	79
4点（正方形）	119
1重（2回目）	163
2重（1回目）	253
6点	261
2重（2回目）	296
3重（1回目）	356
3重（2回目）	666
4重（1回目）	1131
5重（1回目）	1176
6重（1回目）	1205
4重（2回目）	1388
6重（2回目）	1771
5重（2回目）	1823
6重（3回目）	3358

図1

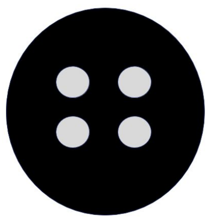


図2

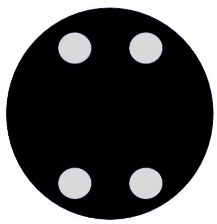
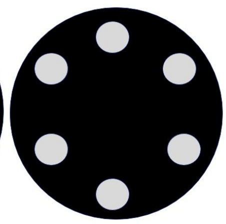
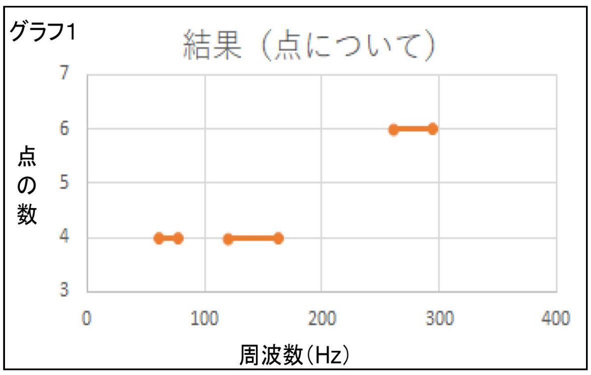
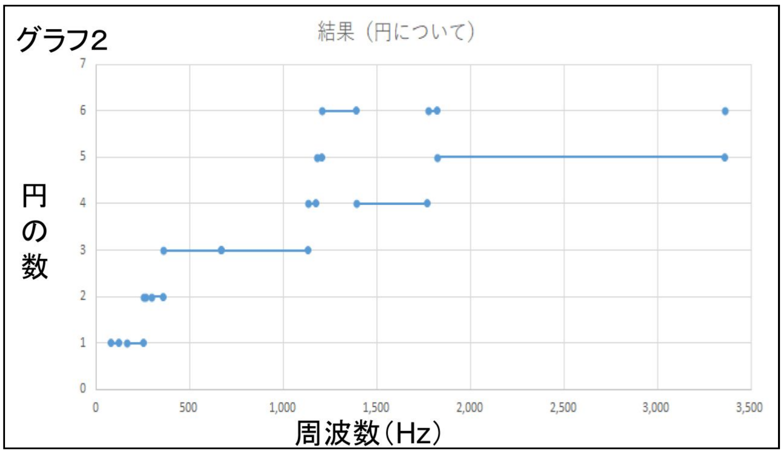


図3







実験２で測定した結果がグラフ３である。周波数が上がると円の数も増えている。次に、理論値を算出するにあたっては、円盤が共振するときの固有振動数の公式である次式を利用した。

$$f=\frac{t}{4\pi r^{2}}\sqrt{\frac{\mu E}{\rho}}$$

tは円盤の厚さ[m]、rは円盤の半径[m]、μは円盤の円の数によって決まる定数、Eはヤング率(引張弾性率)[N/㎡]、ρは円盤の密度[kg/㎥]を表す。μは機械工学便覧より引用した(表２)。円盤の厚さ、半径、密度は実際に測定し、次のような値を得た。

グラフ3

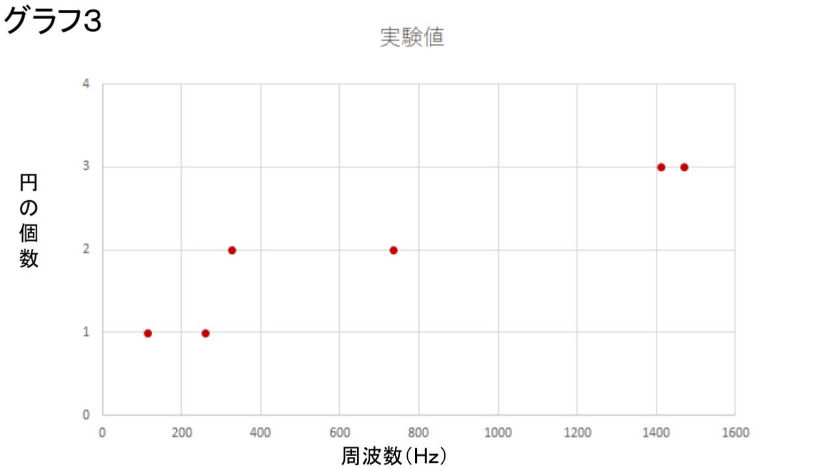


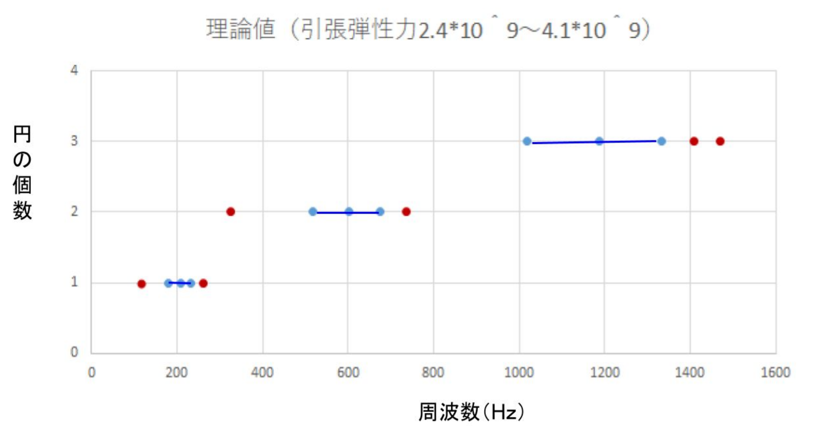
表2

円の数	μの値
1	160.2
2	1349
3	5250

厚さ　1.011×10^{-3}[m]
半径　8.603×10^{-2}[m]
密度　1432.82[kg/m³]

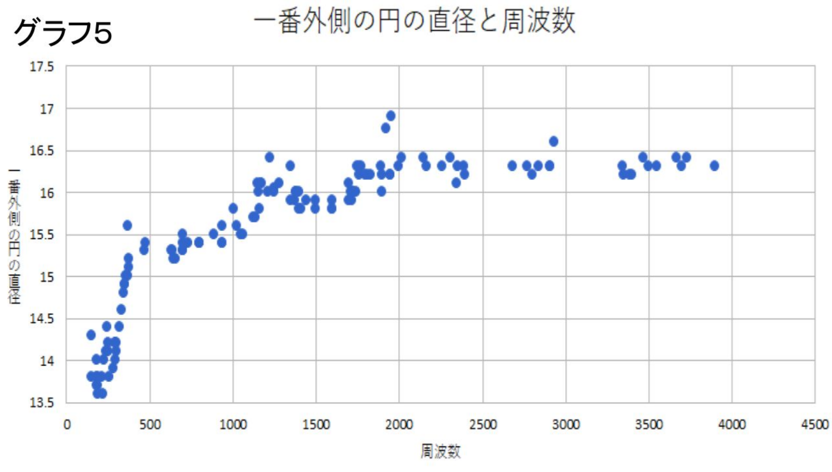
ヤング率は円盤の材質により決まっていて、密度を基に材質をポリ塩化ビニルと推測し、2.400×10^{-9}〜4.100×10^{-9}[N/m²]という値を用いたが、範囲が広いため、最大値、中間値、最小値それぞれで理論値を算出し、実験２の結果と比較した(グラフ４)。なお、赤い点が実験値、青い線が理論値の範囲を表す。結果は、理論値上には重ならなかったものの、近い値が示された。

グラフ4

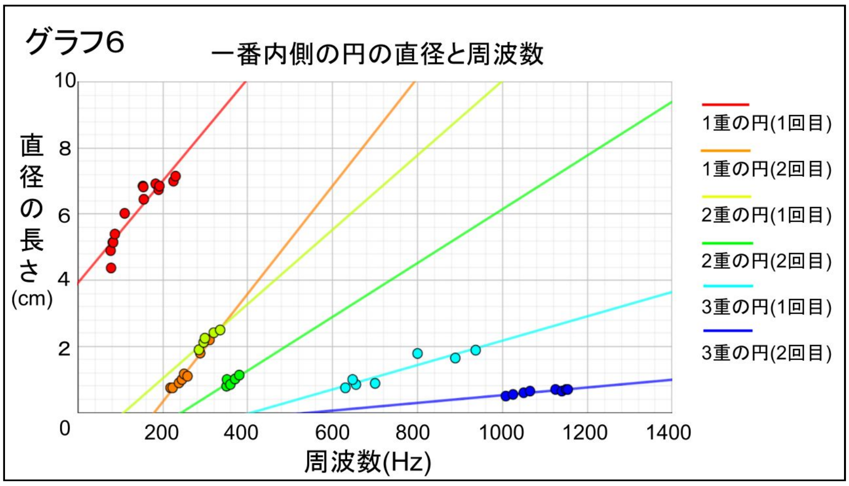


　実験３での一番外側の円の直径と周波数の関係がグラフ５である。この実験では、円の個数に関係なく円の直径と周波数の関係のみをグラフに表している。周波数が上がるにつれ、外側の円の直径も大きくなっており、これらの相関係数を調べたところ相関係数は0.792で強い正の相関が確認された。

グラフ5

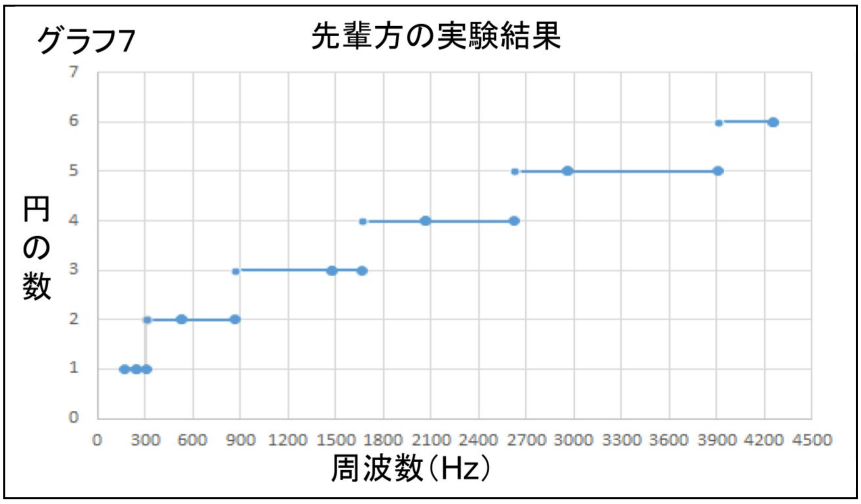


また、一番内側の円の直径と周波数の関係　(グラフ６)では、現れた円の個数ごとに比較し、周波数を上げると内側の円の直径も大きくなり、かつ、円の個数が多くなるにつれ、周波数に対する円の直径の長さの増え方が小さくなっていた。



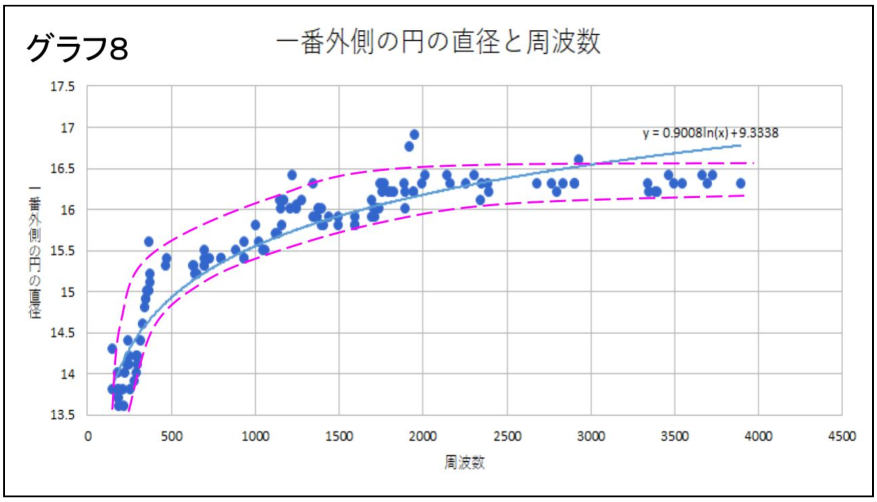
５　考察

　実験１では、現れる点や円の数と周波数の関係を調べた。これを、ほぼ同様の実験を行った平成１５年度横手高校理数科物理班の実験結果(グラフ７)と比較したところ、先輩方の結果は比較的きれいな階段状のグラフになっているのに対し、私たちの結果ではそのようにならなかった。これは、私たちの実験で点の図形ができたことと、円の数が少なくなることがあったためだと考えられる。また、先輩方は中心が節と腹の場合に分けて考えていたが、私たちは区別せず円の数を数えていたことも違いがみられた原因と考えられる。



　実験１を踏まえて、実験２では、『実験の正確性』を求め、理論値との比較検討を行った。この実験では、周波数を記録するタイミングを図形が一番はっきり現れたときとした。これは、実験１の際にどのタイミングを円のでき始めであるととらえるかに観察者による差が生じてしまったので、客観性を保つために判断に差の出にくいタイミングに変更しようと考えたからである。理論値と実験値を比較すると、実験値は理論値とは一致しなかったものの近い値がみられた。差がみられた原因としては、円盤の正確な材質が不明だったために理論値に差が生じた可能性があげられる。

さらに、実験２で円の直径と周波数の関係をグラフにしたところ、一番外側の円の直径と周波数には強い正の相関があることが確認された。この関係を縦軸に円の直径、横軸に周波数とると、対数関数に近いグラフとなった(グラフ8)。しかし、周波数が大きくなると関数からのずれも大きくなる印象があり、さらに実験を重ねる必要があると思われた。また、一番内側の円の直径と周波数の関係については、円の数が増えるにつれて、周波数を上げた時に円が大きくなる割合が減少することが確認され、現れる円の数も関係があることがわかった。



また、先に述べた先輩方の実験では現れていない点の図形(写真１)はどのような要因で生じた図形なのかを３つの仮説を立てて検討した。

写真１

仮説１．円盤のへこみが波形に影響した可能性

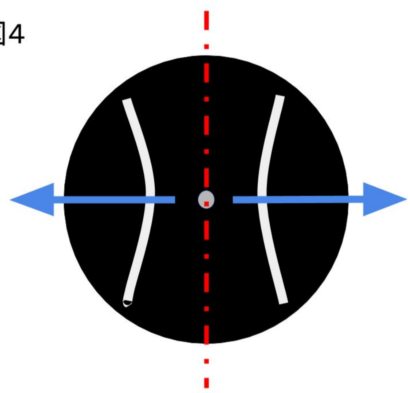
今回使用した実験器具は先輩から受け継いだものを使用しており、多少の劣化が認められ、そのために波がきれいに放射状に伝わらず、節ができる位置が変化したのではないかという案が出た。しかし、他の研究でも今回の点の図形と似た図形が確認されており、この仮説は否定される。

仮説２．波が集まって重なることで生じる可能性

そもそも、波が放射線状にでているのではなく、中央の震源から2方向、３方向、４方向と対称性を持って伝わり、それぞれの波が互いに影響し合わないような位置に節を持つとき、全体は波形を維持し、点のような図形ができると考えた。

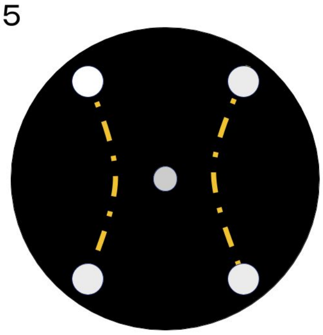
例えば、波が正反対に２方向に伝わる場合、まずその波の節に砂が集まり、曲線の図形ができる(図４)。

図4



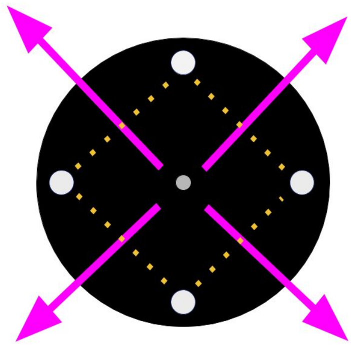
しかし、しばらくすると、曲線の中央部分の砂が失われ、４つの点ができる(図５)。
また、波がそれぞれ垂直に交差する４方向に伝わる場合、波が四方に向かって進むので、黄色の点線のように節ができる。その両端に同様に砂が集まり、４つの点ができる。

図5



先程の2方向の波に加えてその方向に直交するように、新たに2方向に伝わる波が存在し、その節によって等間隔の点が形成されると考えられる(図６)。

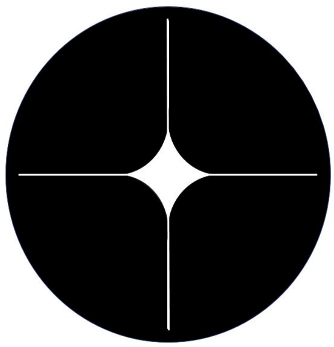
図6



仮説３．そもそも点ではない可能性

　クラドニ図形を研究した明治大学桂田研究室の岡田卓氏、平野 裕輝氏の論文「クラドニ図形」では、図７のような図形が確認されており、私たちの実験でも同様の波形が形成されていたのが、何らかの影響で、点だけが残った図形となった可能性があると思われた。

図7



　以上の推測を立てたが、点が現れた理由ははっきりしていない。これらを解明していくためには、点の図形が現れる際にどのような波形が生じているのかを検討する必要があると思われる。

６　今後の課題

(1)円と周波数、さらに一番外側と、一番内側の円の直径と周波数に関係性があると考えられたことよりこれらの関係の式化を目指し実験をすすめる。
(2)同心円状または同心球状に広がる波のような軸対称または点対称の系統を取り扱う時に、半径方向の波の振動パターンとして現れる関数（ベッセル関数）を利用し波の波形を検討する。

７　謝辞

　これまで私たちの研究をサポートしてくださった釜田博一先生をはじめ、多くの先生方、協力してくださった２年１組の皆さんに深く感謝いたします。

８　参考文献

・機械工学便覧
・「5 クラードニの図形」
　gakusyu.shizuoka-c.ed.jp/science/ronnbunshu/033081.pdf
・明治大学理工学部数学科桂田研究室2009年度卒業研究レポート
　「クラドニ図形」

ロバート・フック　　エルンスト・クラドニ