

アステロイド曲線を發展させる

Asteroid Curve

高橋真広 松村慶斗 細谷倫隆 水谷隼人

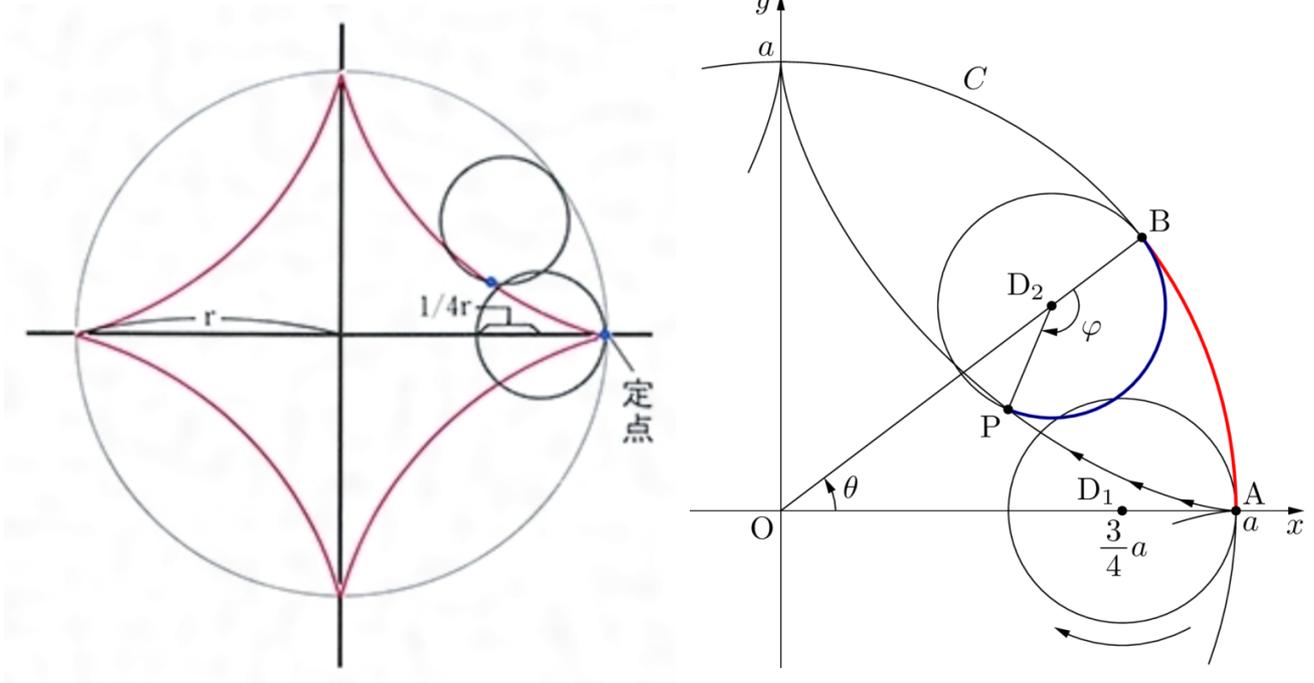
指導教員 千葉将仁

1.はじめに

アステロイド曲線とは、半径 a の大きさの円の内部を、その $1/4$ の大きさの円が滑ることなく転がったときの一点の軌跡のことで、媒介変数表示をすると、

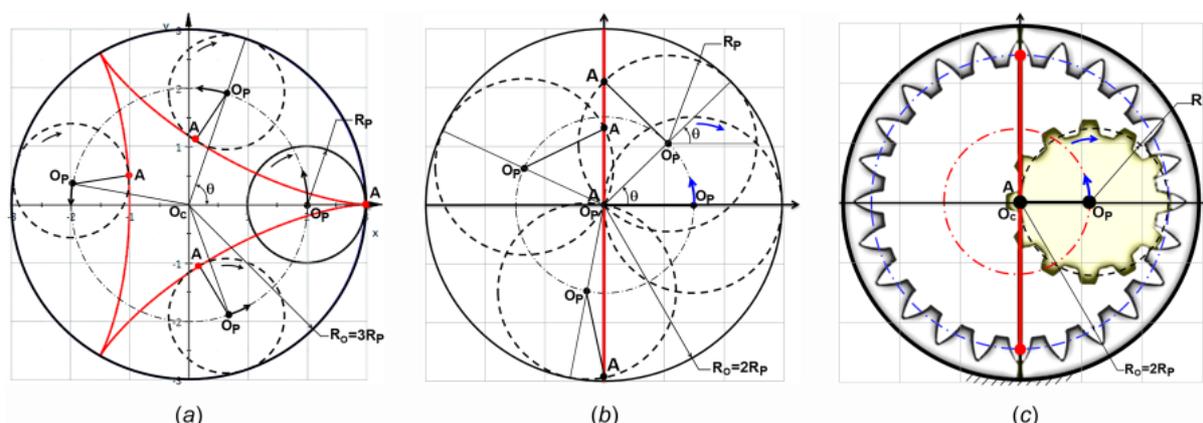
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$
 という式で表される。また、座標平面上に表すと、

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ となる。



アステロイド曲線

このアステロイド曲線は、サイクロイドの一種であり、身近な使用例としては、旧式のエンジンの設計に使われている。



我々はこのアステロイド曲線に興味を持ち、式①の指数を有理数 p とおいた、 $x^p + y^p = a^p$ という式を主題式と設定した。また、主題式は、フェルマーの最終定理の $x^n + y^n = z^n$ という式と似ているため、フェルマーの最終定理を図形的に考察できるのではと考えた。フェルマーの最終定理とは、 n が3以上の自然数のとき、 $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数の組 x, y, z は存在しないというもので、1999年にイギリスの大学教授アンドリュー・ワイルズにより証明されている。私達は、主題式の p の値を変化させたり、格子点を調べたりすることで、フェルマーの最終定理を図形的に証明することなどに役立つのではないかと考え、研究を始めた。

2.研究の目的

前述の通り、この研究を進めることにより、フェルマーの最終定理を図形的に考察／理解することに役立てられると考えている。フェルマーの最終定理は通常非常に複雑でかつ長い証明を要し、フェルマーの最終定理を証明したアンドリュー・ワイルズが作成した論文は100ページにも渡る。我々高校生など数学を専門的に研究していない人々にとっては、それらの証明を理解するのは難解なことである。そういったときに、この研究を通してフェルマーの最終定理の理解を手助けするような考察を生み出すことを考えている。

3.実験方法

実験や研究において、大量の試行を行う際などは「Google Colabratory」で Pythonを用いたコードを作成し、実際にGoogleのサーバーで実行した。ほかに、具体的な数値を代入したときのグラフのサンプルを得る際には「GeoGebra」及び「desmos」、「Mathway」を使用した。あとに研究でこのサービスを使用する生徒に向けて、利点や注意点を記載する。

「Google Colabratory」

利点: Pythonを用いたコードの実行が可能で、大量な試行の結果などを数分～数時間で出すことができる。

注意点: 一定時間操作をしなかった場合にコードの実行が中断される（途中から再開するのは難しい）

「desmos」

利点: Chromebook上でも動作が軽い、作ったグラフの共有が可能

注意点: 指数の値が少数になると、数学的に正しくない結果を示す場合があった

「Mathway」

利点: チャット形式、日本語に対応している、一つの入力から様々な選択肢を取れる

注意点: 広告が多い

「GeoGebra」

利点: 3次元のグラフのプロットが行える、作ったグラフの共有が可能

注意点: 動作が若干重い

なお、基本的にこれらのサービスでは、以下の入力方法が一般的である:

x^3 (xの3乗) … x^3 ※ 「^」 …通称キャレット、べき乗を表す

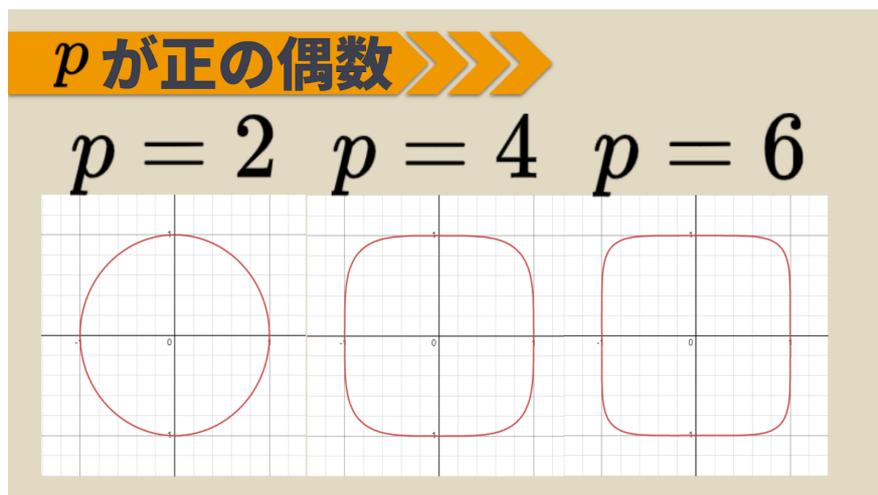
応用: $(2/3^{ab})^c$ … カッコ3のab乗 分の2 カッコ閉じ c乗

3. pの値による分類

我々は主題式が描くグラフについて詳しく調べるため、指数 p に色々な値を代入した。

I. p が正の偶数のとき

$p = 2$ のときは我々がよく知る円を示す式になる。その上に、 $p = 4, 6, 8 \dots$ と値を増加させていくと、だんだん円が角張ったような形になり、面積 a^2 の正方形に近づく。



II. p が正の奇数のとき

右画像のようなグラフが得られ、これを微分するなど調べると以下のことがわかった。

y' : グラフ上の点における接線の傾き

常に負 \Leftrightarrow 常に減少関数

y'' : 接線の傾きの増減の様子 \Leftrightarrow グラフの凹凸

$0 < x < 1$ において負 \Leftrightarrow 上に凸

$x < 0, 1 < x$ において正、下に凸

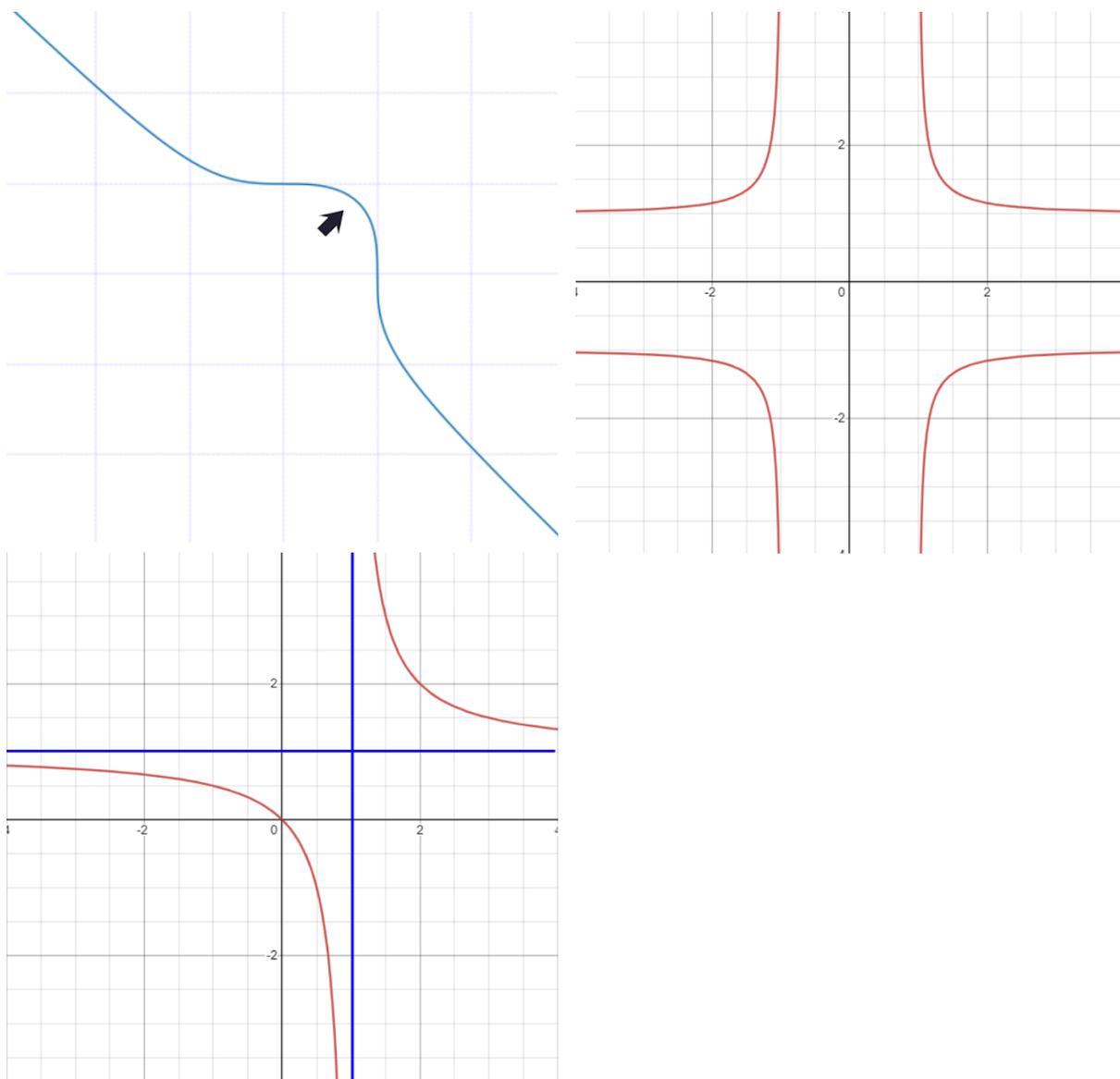
つまり、このときのグラフに直線部分は存在しない（僅かに下に凸である）。

III. p が負の奇数のとき

$x = a, y = a$ の2本の漸近線が得られる。 $x = a$ の右側極限は ∞ 、左側極限は $-\infty$ である。

IV. p が負の偶数の時

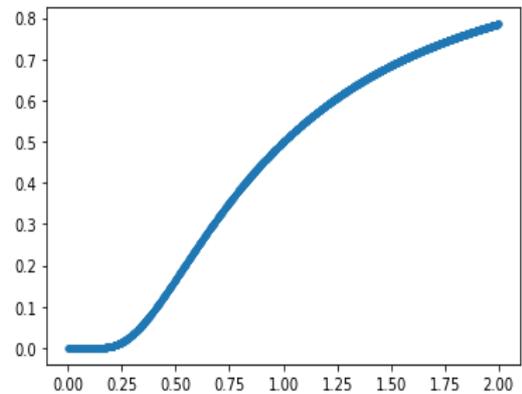
$x = \pm a, y = \pm a$ の4本の漸近線が得られる。



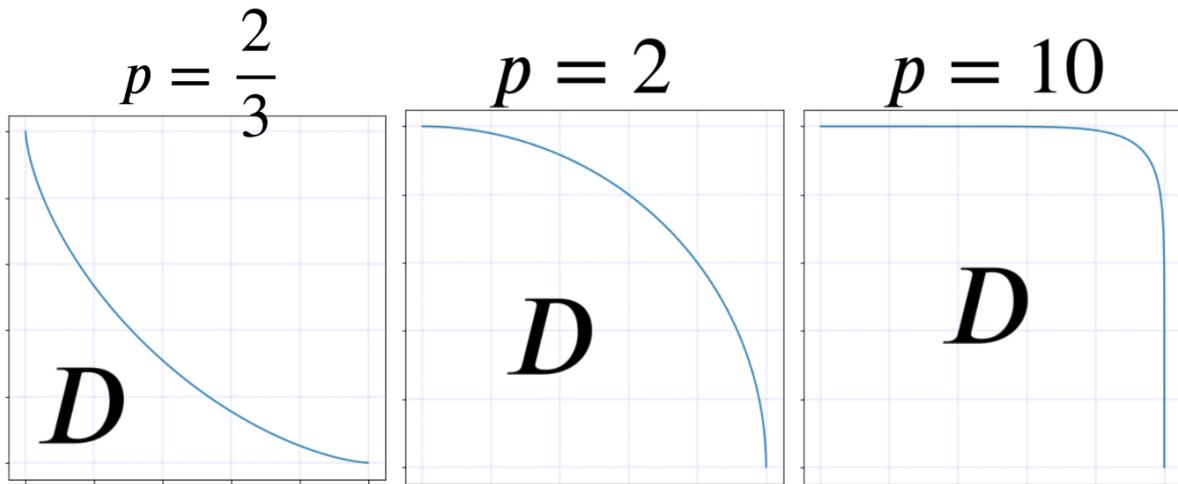
いずれの場合も、 p が非整数である値のときは、定義域の関係で第一象限にのみしかグラフが現れない。

4.規則性の検証

指数 p の大きさを大きくしていくと、グラフの第一象限の部分の形が徐々に正方形の一部のような形に限りなく近づく。私達はこのことから、グラフの第一象限の内側の部分の面積を D としたとき、指数 p と面積 D の変化の仕方に何らかの規則性が見いだせるのではないかと考え、検証を行った。その結果は、次に示すグラフのようになった。 p の値が大きくなるに伴って、 D の値は1に限りなく近づいて増える事がわかる。しかし、私達はこの結果を一般化することができず、具体的な規則性を見出すことは難しいと考えた。



(縦軸... p の値；横軸... D の面積)



$$D \dots x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^p \leq 1$$

この検証にはPythonで作成したコードを使用している。若干長めのコードであるため、本レポート内に記入することはできないが、本研究レポート最終ページの最下部にコメントを付したGoogle ColabのリンクとQRコードを記載してあるため、今後の研究の参考になれば幸いだ。

5. 図形を用いた考察

フェルマーの最終定理というのは前述のとおりである。私たちが今回着目したアステロイド曲線の式を変形した主題式と、フェルマーの最終定理の式はよく似た形をとる。したがって、主題式を図形的に調べることでフェルマーの最終定理の図形的な考察ができるのではないかと考えた。

図形的にフェルマーの最終定理を言い換えると、「 z が自然数ならば主題式の描く曲線が格子点（ x 座標と y 座標がともに整数である点）を通らない」とすることができる。

実際にPythonを用いて主題式の描く曲線が格子点を通るか、検証してみた。その時に使用したコードが別紙の資料1である。

これを実行した結果、指数 n が3で z が1000以下の自然数のとき、いかなる格子点も通らない事がわかった。

よって図形的に考えると、数の範囲は限られてくるがフェルマーの最終定理が成り立つことが確認できた。

6. 謝辞

秋田県立大学 廣田 千明先生

横手高等学校 千葉 将仁先生

瀬々 将史先生

本研究を行うにあたり丁寧なご指導をありがとうございました。

7. 参考文献

1. アステロイド(曲線) - Wikipedia

[https://ja.wikipedia.org/wiki/アステロイド_\(曲線\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/アステロイド_(曲線))

2. アステロイド曲線 | 大学入試数学の考え方と解法

<https://methodology.site/asteroid/>

資料1 使用したプログラム (Python)

```
import math
n=3 #指数
rep=10 #繰り返し回数(yをどの値まで調べるか)

for x in range(1,rep+1): #rep回だけ以下の動作を繰り返す
    for y in range(1,x+1): #xの値の回数だけ以下の動作を繰り返す
        #zの候補を2つ求める
        #小数部分を切り捨てたもの
        z1=int(math.floor((x**n+y**n)**(1/n)))
        #小数部分を切り上げたもの
        z2=z1+1
        #候補が主題式を満たしているか判定
        diff1=z1**n-(x**n+y**n)
        diff2=z2**n-(x**n+y**n)
        print(x,y,"diff1=",diff1," diff2=",diff2)
        #diff1やdiff2が小さいものは格子点の近くを通っている
    print("-----") #区切り線の追加
```

上記コード及び規則性の検証+第一象限でのグラフの描写、面積の導出をするプログラムなどがあるGoogle ColabatoryのページのQRコード及びリンク:

<https://x.gd/gENi5>

(エックス、ピリオド、ジー、ディー、スラッシュ、小文字ジー、大文字イー、大文字エヌ、小文字アイ、数字ファイブ)

