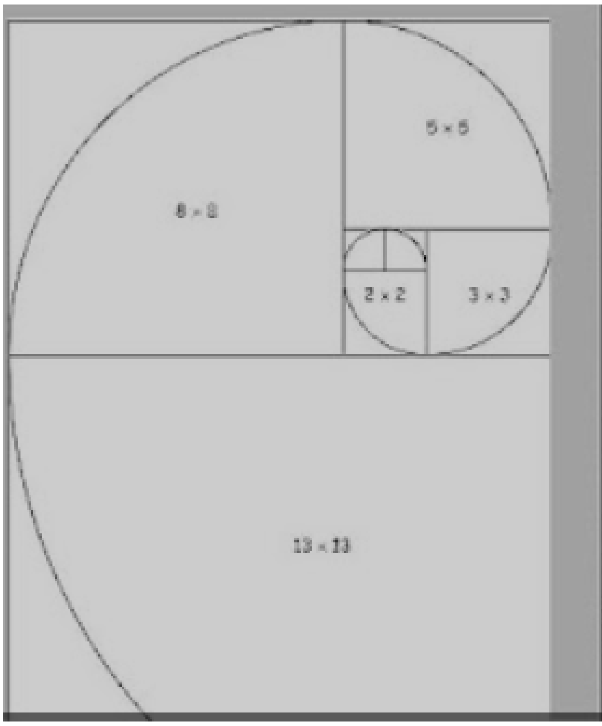
フィボナッチ数列を自然数で割ったときの余りの周期の法則性について

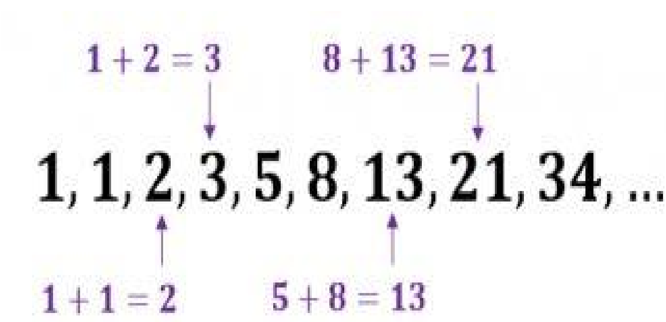
数学班：明平涼聖　阿部絢太　佐藤幸悠　橋村春輝
指導者：木元大輔

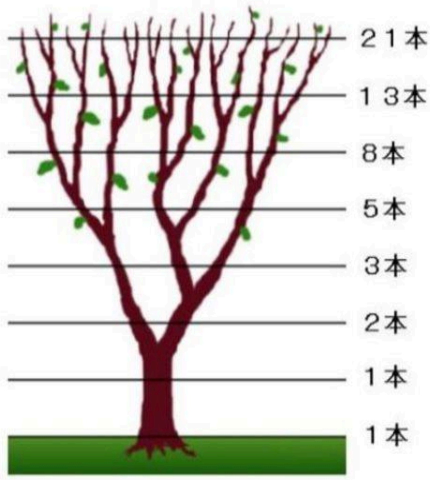


レオナルド・フィボナッチ（1170頃~1250頃）
中世で最も才能があったと評されるイタリアの数学者。
実際はフィボナッチ数列はフィボナッチ著の『算盤の書』にて紹介されただけであり、フィボナッチ本人が見つけたものではないと言われている。

1.はじめに

私達は数列の勉強をしているときに、フィボナッチ数列という興味深い数列を知った。フィボナッチ数列が黄金比や木の枝の数など、人間界・自然界に多くの影響を及ぼしていることから、フィボナッチ数列にはまだまだ面白い法則性が隠されているのではないかと考えた。そして私達は、フィボナッチ数列の各項を自然数で割ったときの余りに注目すると、周期性があることに気がついた。

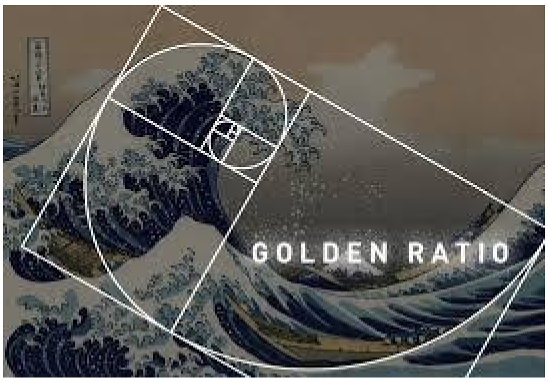


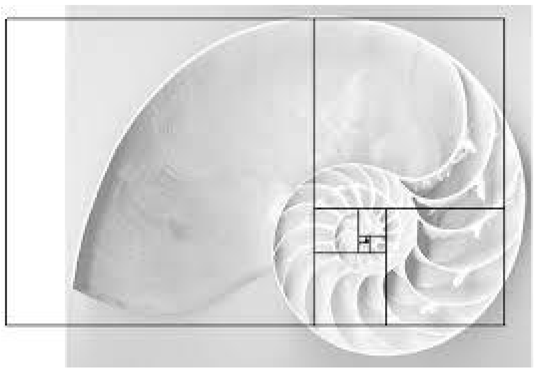


～自然界に存在するフィボナッチ数列の例～

・木が成長するときの枝の本数

・隣り合うフィボナッチ数列の項の比が黄金比（1：1.618）に収束する





2.研究の目的

・フィボナッチ数列を自然数で割ったときの余りの周期について着目し、法則性を　見つける。

・フィボナッチ数列のあらたな法則を見つけ出し社会や自然界への応用を考える。

3.実験方法

・GoogleスプレッドシートやGoogle Colaboratoryを用いてフィボナッチ数列を生成　する

・各項を自然数で割ったときの余りを求める

・余りについてのグラフや表を作って分析し、規則性を調べる

予備実験

・フィボナッチ数列を任意の自然数で割ったときのグラフを生成する。（図１、２，３）

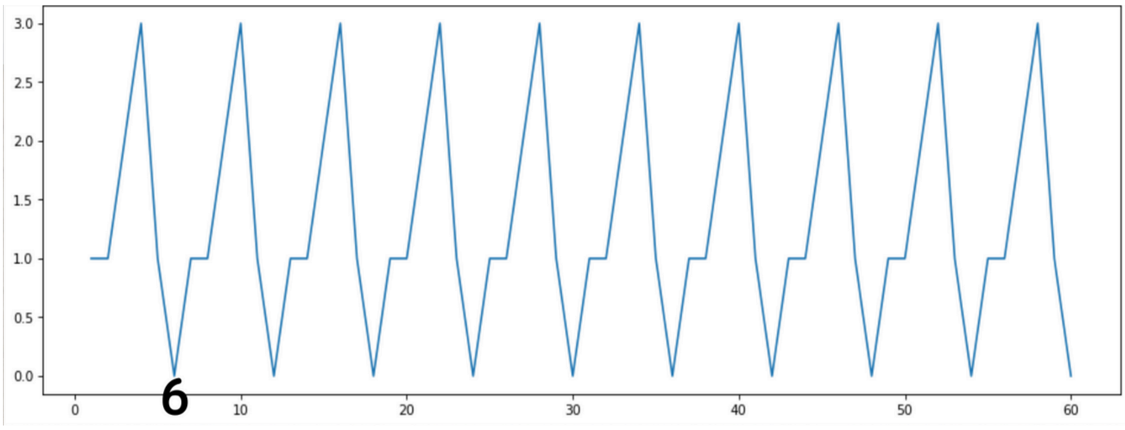


図1（4で割ったときのグラフ）
（横軸：フィボナッチ数列の項　縦軸：余りの値）

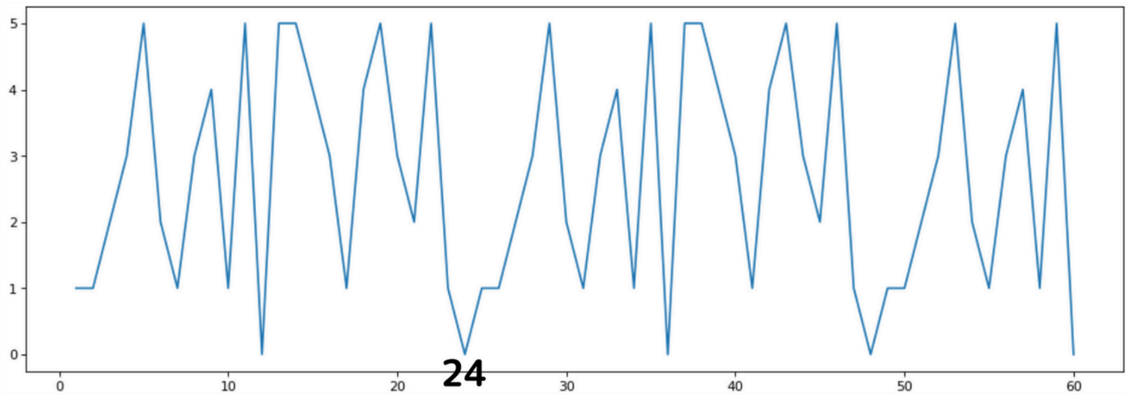


図2（6で割ったときのグラフ）
（横軸：フィボナッチ数列の項　縦軸：余りの値）

図1,2のグラフを作成したことにより、フィボナッチ数列を自然数で割ったときの余りには周期性があることが視覚的に確認することができた。

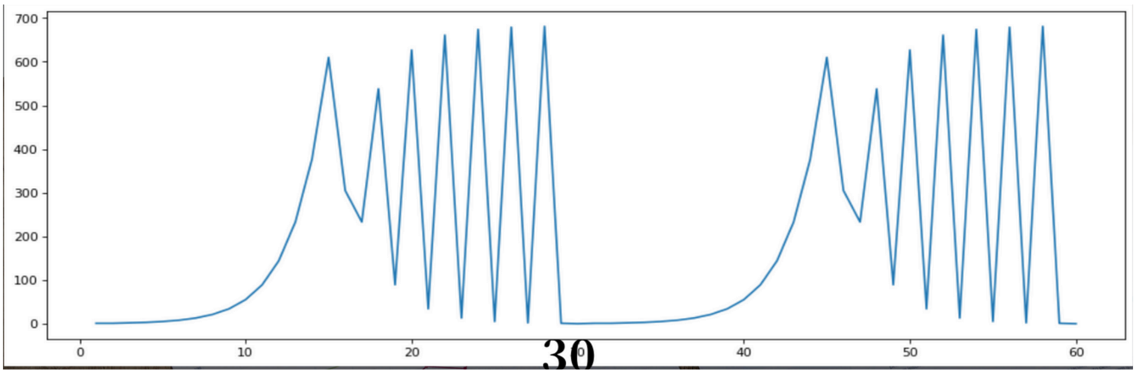


図3（682で割ったときのグラフ）
（横軸：フィボナッチ数列の項　縦軸：余りの値）

実際にグラフを作成して見てみると、割る数を色々な値に変えてみても、それぞれ周期性があることがわかった。また、割る数が大きくなれば、周期の長さも単調に増加すると考えたが、割る数によって周期の長さはかなり変わることがわかった。更にプログラムを作って割る数に対する周期の長さをグラフ化して見てみる。

4.実験結果

・下記のプログラムを作成し、フィボナッチ数列を割る数とそれに対応する余りの　周期に関してのグラフを生成する。（図4，5）

```
plt.figure(figsize=(35, 5), dpi=78)

x = []
y = []
f = []
n = 40000
d = 5000

f.append(1)
f.append(1)
for i in range(2,n):
  l = f[i - 2] + f[i - 1]
  f.append(l)

for i in range(2,d + 1):
  for k in range(2,n):
    a = f[k] % i
    b = f[k + 1] % i
    if a == b == 1:
      break
  x.append(i)
  y.append(k)

plt.plot(x,y)
```

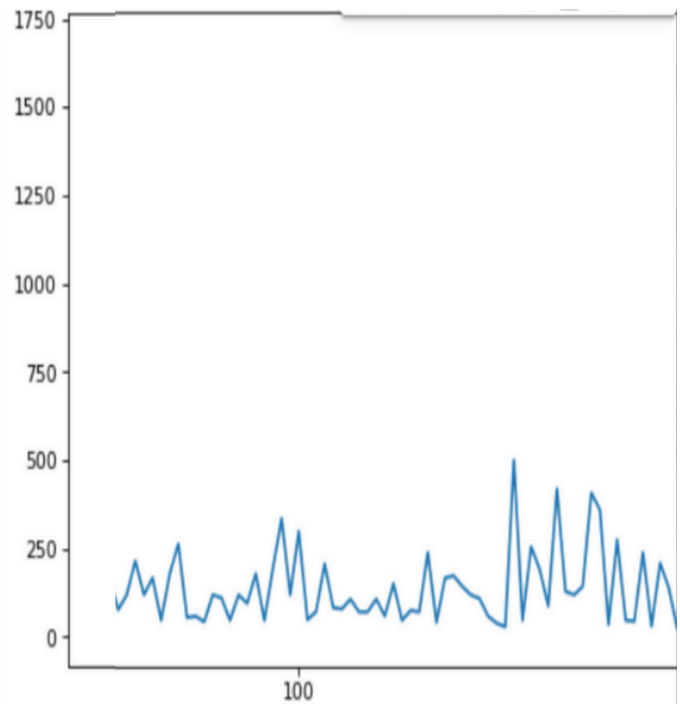


図4（フィボナッチ数列を自然数で割ったときの余りの周期を求めるプログラム）

図5（図4のプログラムを実行した結果）
（横軸：フィボナッチ数を割る数
縦軸：余りの周期）

横軸の値が小さい時はグラフに特徴があるようには見えなかったため、各軸を拡張したグラフを生成した。

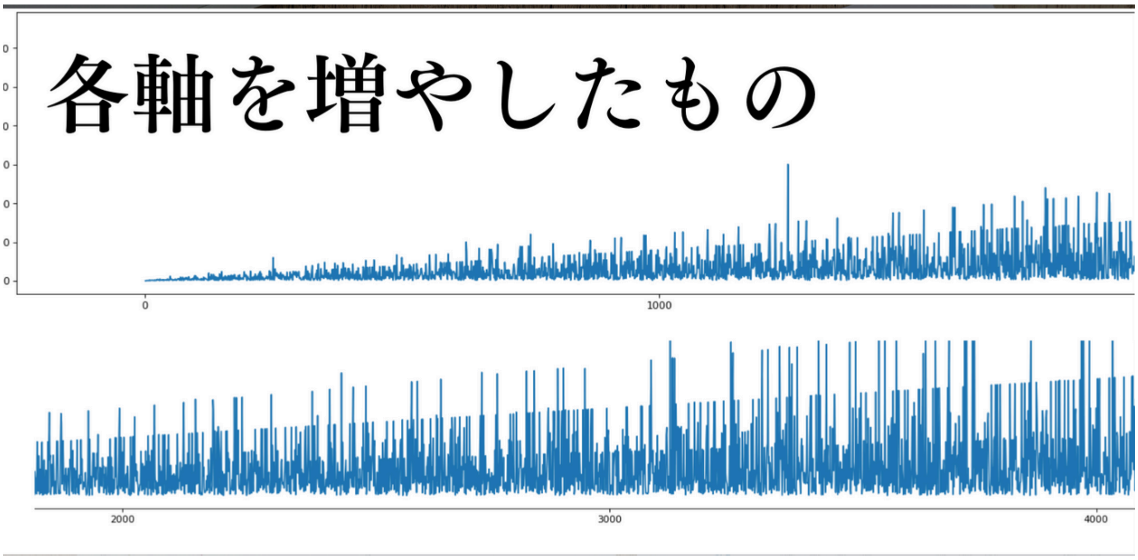


図6（フィボナッチ数列を割る数とそれに対応する余りの周期に関するグラフ）
（横軸：フィボナッチ数を割る数　縦軸：余りの周期）

各軸の値を増やしてみると全体として一次関数的に増えていくように見えた。

グラフの中で直線のようになっている部分を見つけたため、そこに赤線を引き、赤線上の点の座標を調べてみると、割る数とそれに対応する余りの周期の比率が約1：2になっていることが分かった。（図7）

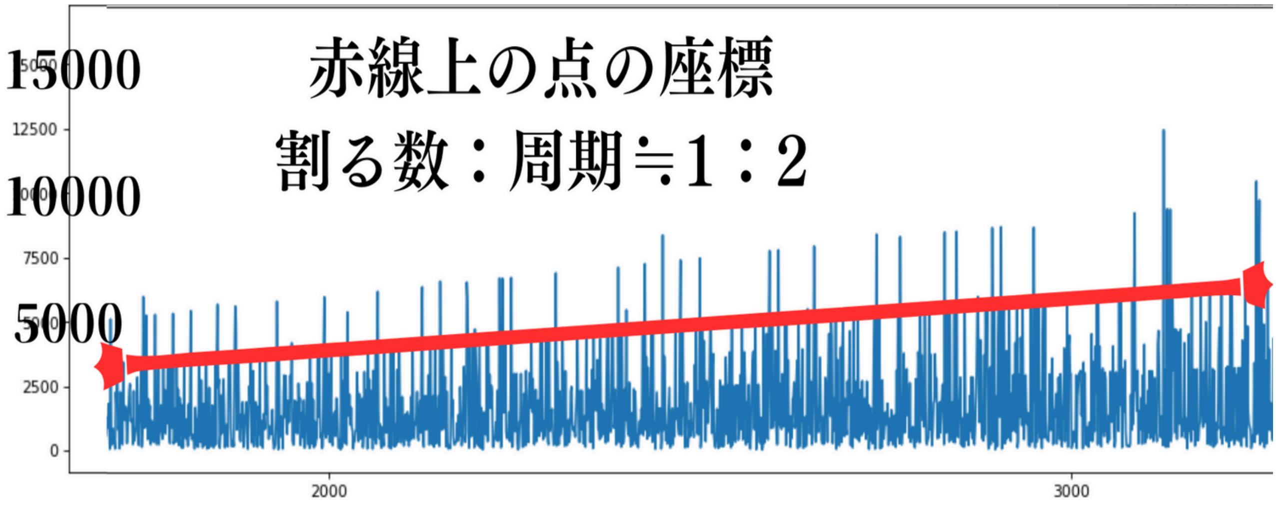


図7（フィボナッチ数列を割る数とそれに対応する余りの周期に関するグラフ）
（横軸：フィボナッチ数列を割る数（自然数）
縦軸：割る数に対応する余りの周期の長さ）

なぜこのような点が多く見られるのか調べるため、下記のようなプログラムを作成し、割る数と周期の比率が1:2であるものを抜き出した表を作成した。

```
x = []
y = []
f = []
n = 400000
d = 5000

f.append(1)
f.append(1)
for i in range(2,n + 2):
  l = f[i - 2] + f[i - 1]
  f.append(l)

for i in range(2 , d + 1):
  for k in range(2,(n + 1)):
    a = f[k] % i
    b = f[k + 1] % i
    if a == b == 1:
      break
  if 1.99 <= k / i <=2.01:
    print(i ,k)
```

図8（割る数と周期の比率が1：2であるものを表示するプログラム）

下の図9の表はプログラムを実行して得られた表の一部である。

997	1996	2.002006
1013	2028	2.00197
1033	2068	2.00193
1063	2128	2.00188
1093	2188	2.00182
1115	2240	2.00896
1117	2236	2.00179
1123	2248	2.00178
1135	2280	2.00881

図9（フィボナッチ数列を割る数と余りの周期の比率が1:2であるものを抜き出した結果の一部）

（左列：割る数　中列：周期　右列：割る数と周期の比率）

割る数に注目すると、素数や大きい素数の倍数が多く見られた。

割る数の1115=5x223, 1135=5x227 など、

素数でなくても、3桁以上の素数の倍数であることが多かった。

また私達は合成数(素数の積で表された数)の素因数それぞれの余りの周期が
その合成数の周期の最小公倍数になるのではないかという仮説を立てた。
合成数の余りの周期と約数それぞれの周期の最小公倍数について調べるため、以下のようなグラフを作った。

44	30	30
45	40	120
46	48	48
47	32	32
48	24	24
49	16	112
50	60	300
51	72	72
52	84	84
53	108	108
54	24	72
55	20	20

図10(割る数と割る数の約数それぞれの余りの周期の最小公倍数と実際の周期を表した表の一部)

(左列:割る数　中列:割る数の素因数の周期の最小公倍数　右列:実際の周期)

実験結果

合成数の周期は素因数それぞれの周期の公倍数になることがわかったが、
最小公倍数にはならなかった。

5.考察

・フィボナッチ数列を自然数で割ったときの余りの周期は割る数が素数か大きい素　数が約数に含まれている数であるときに大きくなる。(割る数の約2倍)

・余りの周期は割る数の因数それぞれの周期の最小公倍数または公倍数になる。

6.今後の課題

・今回発見した法則性を証明する。

・他のプログラムも作成し、新たに法則性を見つける。

・素数のときの周期が長くなることの理由を究明する。

・最小公倍数になる数とならない数がある理由を究明する。

7.謝辞

研究にご協力頂きました木元大輔先生、深く感謝いたします。

8.引用・参考文献

奈良女子大付属中等教育学校
フィボナッチ数列の剰余における法則

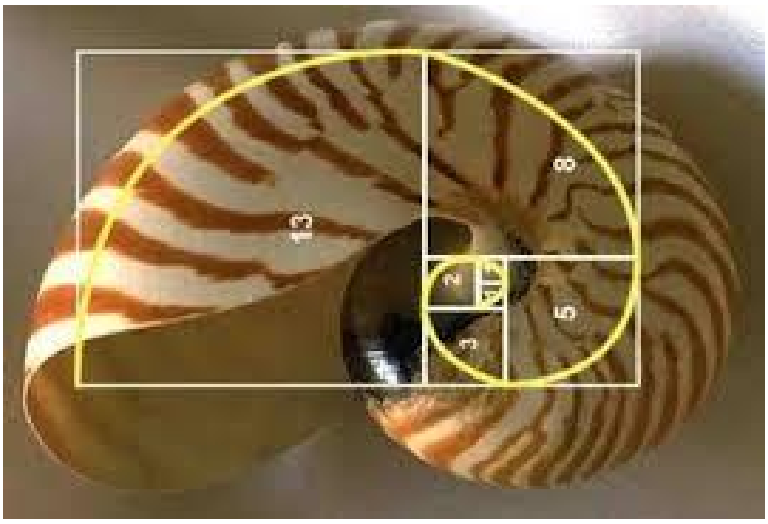
https://nwuss.nara-wu.ac.jp/media/sites/11/ssh15_05.pdf

フィボナッチ数列の剰余の
規則性の証明：数学って面白い！？

http://blog.livedoor.jp/enjoy_math/archives/50640281.html

津山高専
数列に関する研究

https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/FreeRsearch/NumberSequence.pdf



アンモナイトとフィボナッチ数