



軸平行多面体とピックの定理の関係性

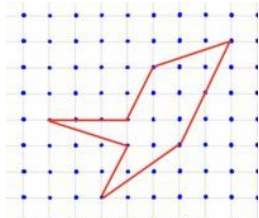
秋田県立横手高等学校 2年1組 数学班

指導教員 大橋俊文

小松田沙和 石田莉路 黒澤壮 高橋時生真 高橋敦 松井晴士朗 横山拓馬

◎ピックの定理とは

格子点上に全ての頂点がある平面図形が含む格子点数からその面積を求める定理。



内部の格子点数： i 辺上の格子点数： b

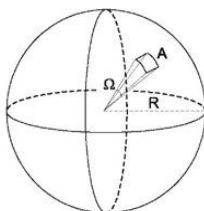
$$S = i + \frac{1}{2}b - 1$$

◎研究背景・目的

私達上記の定理の3次元版に着目した。しかし、それは凸多面体しか扱えないため、立体角やポロノイ領域によってそれ以外の図形(主に軸平行)を扱うことを目指した。

◎研究①

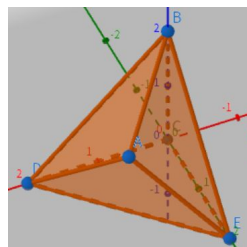
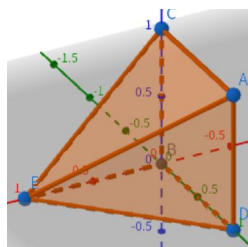
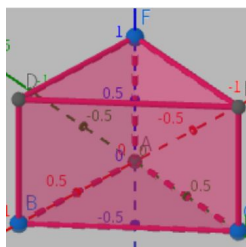
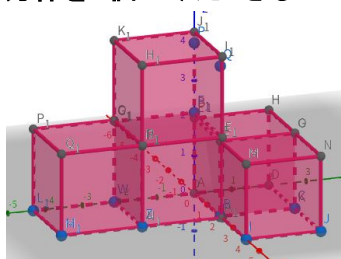
図形内の格子点について立体角を考え、面積との関係性を調べる。



$$\Omega = \frac{A}{R^2} \text{ steradians (sr)}$$

◎軸平行多面体における体積と立体角の関係

単位立方体は規格化した立体角を考えると 8つの格子点が体積に $1/8$ ずつ寄与するため体積は 1。ある軸平行多面体に単位立方体を1個つけたときも体積1だけの増加に寄与するため、体積と規格化した立体角の総和を同じように扱えるとわかる。



◎研究結果①

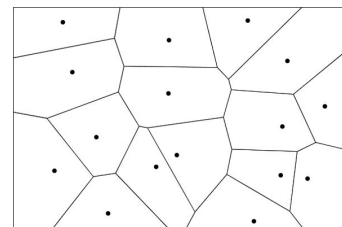
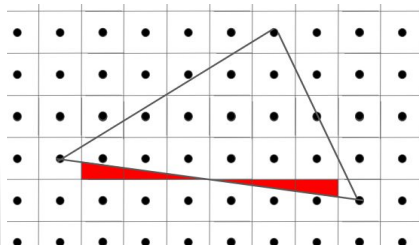
軸平行多面体において立体角を用いることで体積を正確に計算できることを証明した。

軸平行多面体以外の図形では、立体角による計算と体積が一致しない場合があることを確認した。立体角から求めた体積と実際の体積が一致しない理由について、数学的に証明が可能となった。

◎研究②

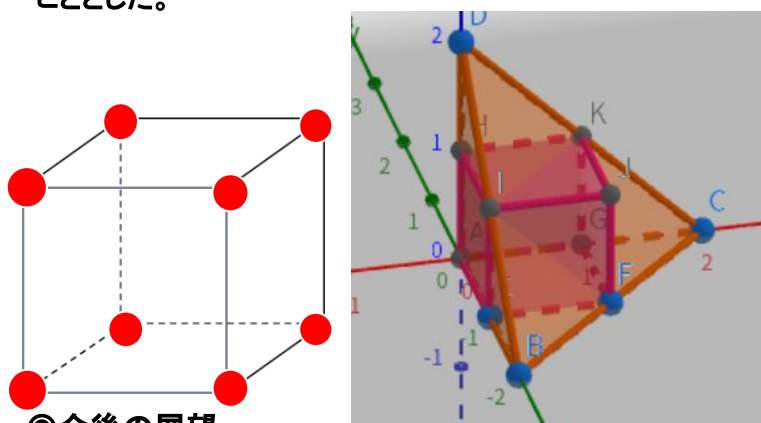
ポロノイ領域についても立体角と同様に検証する。

・ポロノイ図の例



◎研究結果②

ポロノイ領域は広範囲に適用でき、計算もしやすかったため、今後はこれを中心に研究することとした。



◎今後の展望

- ・軸平行多面体の穴が空いている場合や高次元の場合についても考える。
- ・ここまでの内容により厳密な証明を与える。

参考文献

・3次元版ピックの定理について

https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/95/95-8.pdf <https://trap.jp/post/1701/>

・ピックの定理の多次元拡張