軸平行多面体とピックの定理の関係性

小松田沙和　石田莉路　黒澤壮　高橋敦　髙橋時生真
松井晴士朗　横山拓馬
指導教員　大橋俊文

要旨

平面図形の面積をその図形に含まれる格子点の個数から求められる「ピックの定理」という定理がある。私達は、これの3次元への応用について着目した。3次元版ピックの定理は既に存在しているが、その適用条件を満たさない図形も多いのでこれと異なる視点から考察しようと考えた。そのために、条件を限定した図形について調べたり、立体角やボロノイ領域などの考え方を用いたりした。

1. 主要な用語

(a)ピックの定理

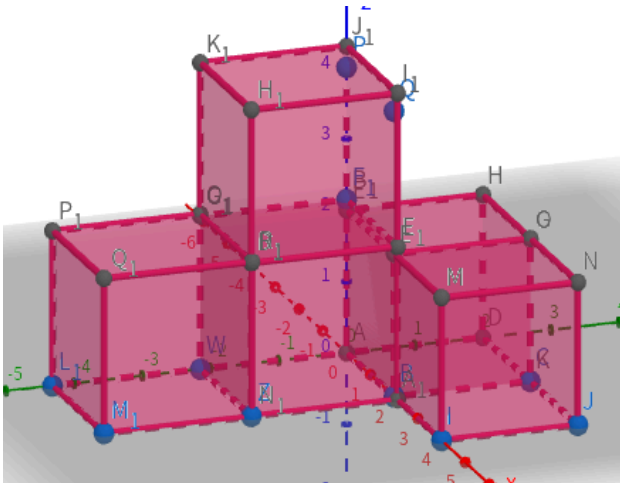
格子点上に全ての頂点がある平面図形が含む格子点数からその面積を求める定理。
式は以下の通りである。

内部の格子点数：i　辺上の格子点数：b

$$S = i + \frac{1}{2}b - 1$$

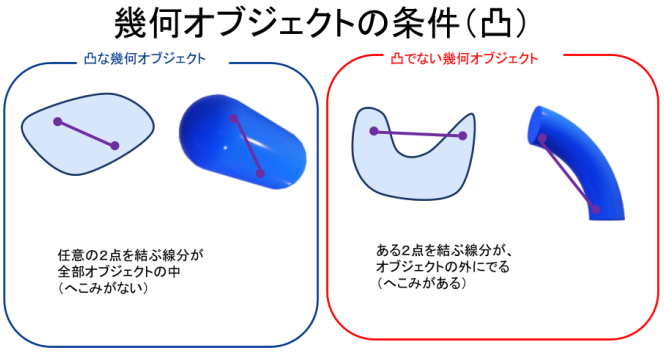
(b)軸平行多面体(3次元)

多角形の各面の法線ベクトルが3次元直交座標の空間の3つの軸いずれかに平行である時、その図形は軸平行多面体であるということとする。
計算幾何学や3次元グリッド構造でよく使われる。 形状が単純で、衝突判定や体積計算が効率的に行 えることからよく使われる。

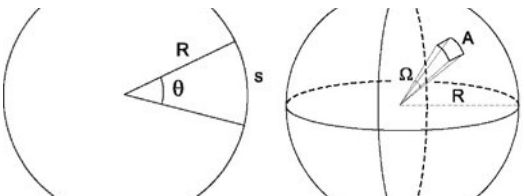


(c)凸

図形内のいかなる2点を結んだ線分も図形外に出ることのない図形を凸である図形という。
従来の3次元版ピックの定理では凸である図形にしか公式を当てはめることができない。
そこで、私達の研究では凸でない図形への適用を目標としている。



(d)立体角

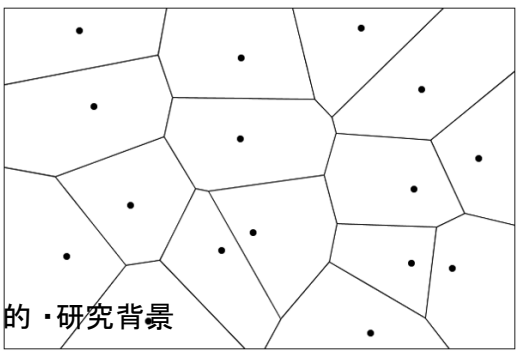


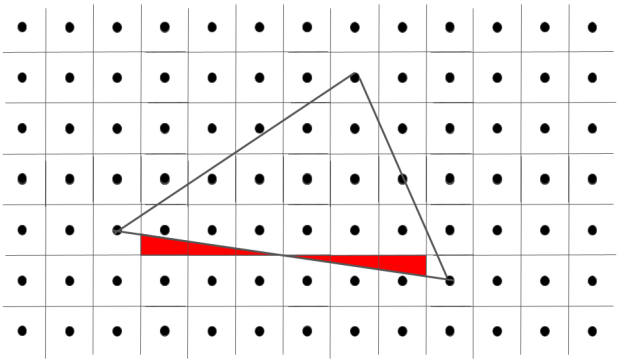
2次元における弧度角とは、円弧の長さと元の円の半径の比である。その対応と同じように球面の一部の面積と元の球の半径の2乗の比を立体角という。
以下のものは球面の一部が三角形となるときの立体角を計算するためのプログラムの一部である。

```
def solid_angle (o,a,b,c):
 oa_vect = [a[0] - o[0], a[1] - o[1], a[2] - o[2]]
 ob_vect = [b[0] - o[0], b[1] - o[1], b[2] - o[2]]
 oc_vect = [c[0] - o[0], c[1] - o[1], c[2] - o[2]]
 oaob_inner_product = oa_vect[0] * ob_vect[0] + oa_vect[1] * ob_vect[1] + oa_vect[2] *
ob_vect[2]
 oaoc_inner_product = oa_vect[0] * oc_vect[0] + oa_vect[1] * oc_vect[1] + oa_vect[2] *
oc_vect[2]
 oboc_inner_product = ob_vect[0] * oc_vect[0] + ob_vect[1] * oc_vect[1] + ob_vect[2] *
oc_vect[2]
 oa_len = math.sqrt(oa_vect[0] ** 2 + oa_vect[1] ** 2 + oa_vect[2] ** 2)
 ob_len = math.sqrt(ob_vect[0] ** 2 + ob_vect[1] ** 2 + ob_vect[2] ** 2)
 oc_len = math.sqrt(oc_vect[0] ** 2 + oc_vect[1] ** 2 + oc_vect[2] ** 2)
 aob_degree = math.acos(oaob_inner_product / (oa_len * ob_len))
 boc_degree = math.acos(oboc_inner_product / (ob_len * oc_len))
 coa_degree = math.acos(oaoc_inner_product / (oc_len * oa_len))
 s = (aob_degree + boc_degree + coa_degree) / 2
 #print(math.sqrt(math.tan(s/2) * math.tan((s - aob_degree)/2) * math.tan((s -
boc_degree)/2) * math.tan((s - coa_degree)/2)))
 return 4 * math.atan(math.sqrt(math.tan(s/2) * math.tan((s - aob_degree)/2) * math.tan((s
- boc_degree)/2) * math.tan((s - coa_degree)/2)))
```

(e)ボロノイ領域(2,3次元)

空間内のすべての点から同時に同じ速度で2次元では円、3次元では球面を広げ、他の円、球面上の点に重なった円、球面上の点の速度を0にすると、その点の集合が成す線分によって空間がいくつかの領域に分割される。この領域をボロノイ領域という。





2. 目的・研究背景

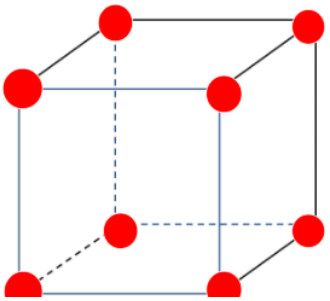
私達は2次元ピックの定理を知ったとき、格子点の個数から複雑な平面図形の面積も簡単に求めら

れることに関心を抱いた。この定理の知識から、同じ方法を立体図形にも応用できれば、立体の体積もより簡単に求められるのではないかと考えた。既に証明されている3次元ピックの定理は、適用範囲が凸多面体に限定されている。そのため、私達は凸多面体以外の図形にも対応できる方法を探ることとした。具体的には、立体角やボロノイ領域を利用することで、凸多面体以外の図形を扱う方法を考えた。まず、軸平行多面体を対象として考え、これを様々な方面に広めることとした。これにより、独自の3次元ピックの定理を発展させ、凸多面体以外の立体の求積の簡易化を目指した。

3. 主題

◯内角比和定理

平面において、角度を2πで割ったものを平面規角度とする。辺上の格子点の平面規角度は½、n角形の図形のすべての頂点角の平面規角度の合計はn-2であることを用いて、図形内の格子点が図形の面積にどれだけ寄与しているかを調べる。この時、図形内の格子点数と図形の面積について、ピックの定理と同様の関係が成り立つ。



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{2\pi} = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

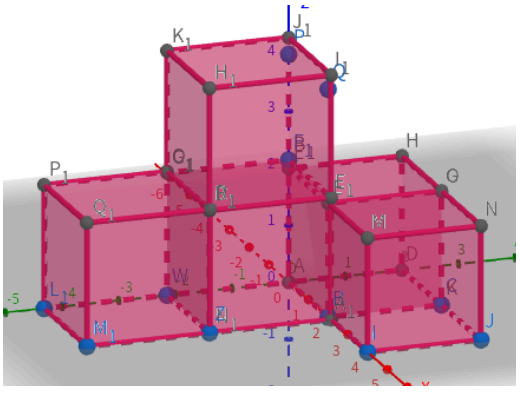
◯立体角比和定理

立体において、立体角を4πで割ったものを立体規角度とする。これを用いて、図形内の格子点が図形の体積にどれだけ寄与しているかを調べる。前述の内角比和定理に対して、これは全ての立体で成り立つ定理ではない。立体角比に関連する定理の1つに「立体角の加法定理」がある。この定理は、複数の立体角が合成される場合、その合成された立体角の大きさが各立体角の合計になるというものである。具体的に、立体角は、異なる方向から見たときにその大きさが加算されることを意味する。例えば、2つの異なる立体角があるとき、その合成は単純に各立体角を足し合わせることで求められる。

4. 方法・結果・考察

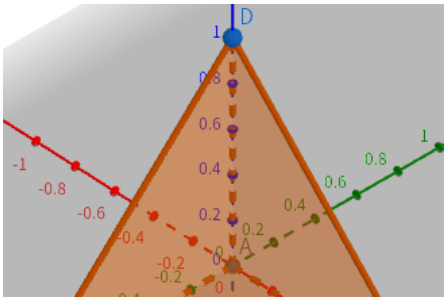
(1)軸平行多面体の各頂点における立体角とその体積との関係の結論
:規格化した立体角の総和と体積が一致する。

説明:
単位立方体は規格化した立体角を考えると、8つの格子点が体積に1/8ずつ寄与するため体積は1である。ある軸平行多面体に単位立方体を1個つけたときも体積1だけの増加に寄与する体積と規格化した立体角の総和を同じように扱える事がわかる。以上のことから軸平行多面体については規格化した立体角と体積を同じものとして扱えることがわかる。なお、厳密な証明の際は図形に含まれる各格子点周りのどの位置にどれだけ図形があるかを場合分けして調べる必要がある。



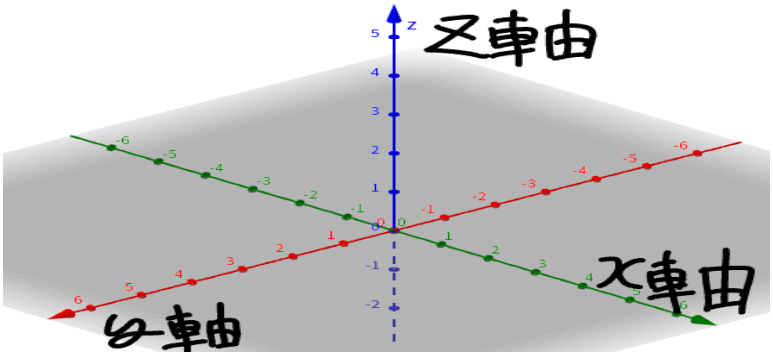
(2)立体角比和定理、使える？使えない？(前編)
この方法では体積を求められない図形も多くある。
結果から言ってしまうと右の図1の立体では成り立たない。
立体角をもとにこの立体の体積を計算すると、

図1



0.2062…となるが、実際の体積は1/6=0.1666…となる。

図2



次に軸並行多面体以外の図形で、立体角を下にして体積を求められる立体を考える。
またこれから出てくる軸は、図2のものとする（X軸は緑、Y軸は赤、Z軸は青）

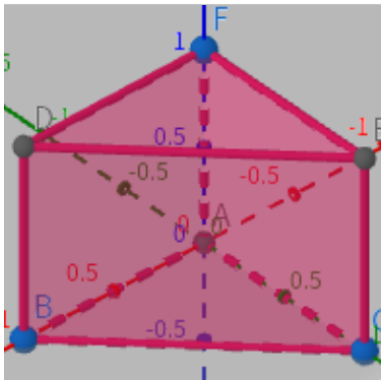


図3

左の図形は1x1x1の立方体を(1,0,0),(0,1,0)を通りZ軸に平行な面で切った図形である。
この立体では立体角をもとにして体積を求めることができた。

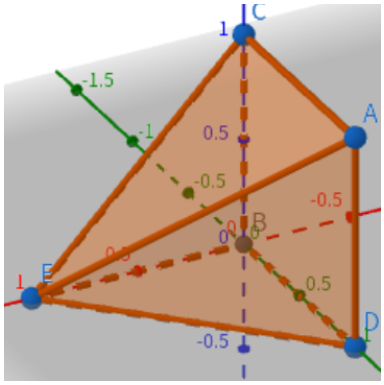


図4

左の図形は図3の図形を(0,1,0),(0,0,1)を通りX軸に平行な面で切った図形である。この立体では立体角をもとにして体積を求　めることができた。

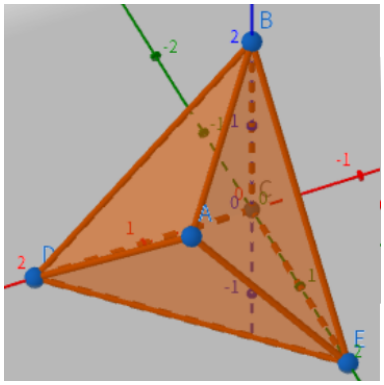


図5

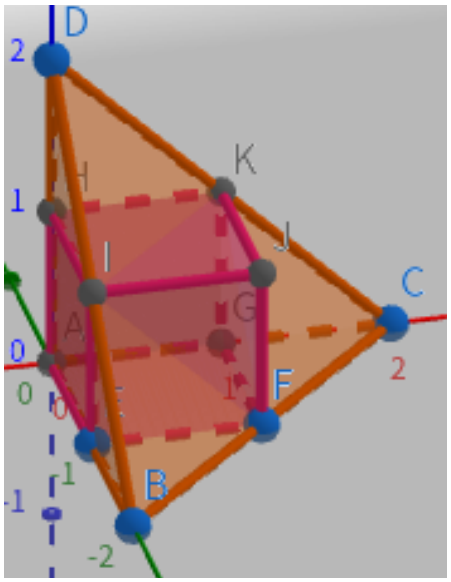
左の図形は図4の図形を(1,0,0),(0,0,1)を通りY軸に平行な面で切った図形である。頂点で座標が(½,½,½)のものがあるため立　体を2倍にして検証し、その結果この立体でも立体角をもとにし　て体積を求めることができた。

(3)立体角と体積の関係、使える？使えない？(後編)

結論:一般的な多面体に適用することはできない。

ここからは格子点図形を基本的なパーツ、すなわち2次元なら三角形、3次元なら三角錐に分割し、そ

れを組み合わせたものとして考えていく。



◯2次元図形の場合
　任意の三角形は周期的なタイリングが可能である。なぜなら、2つの合同な三角形の1辺を合わせて平行四辺形を作ることで平面を埋め尽くせるからだ。よって、2次元図形では内角比和定理は成立する。

◯3次元軸平行多面体の場合
　体積1の立方体に図形を分割する。その立方体は周期的なタイリングが可能である。よって、3次元軸平行多面体では立体角比和定理が成立する。

◯3次元非軸平行多面体の場合
　任意の三角錐は周期的なタイリングが可能でない。よって、任意の3次元図形では立体角比和定理が成立しない。

5. まとめ、これからの展望

　以上のことから、3次元においては図形を基本的なパーツに分割したときに、そのパーツが周期的なタイリング可能でない場合は立体角比和定理が成立しないことがわかった。なお、前項では軸平行多面体が立体角比和定理の成立条件を満たすことを説明したが、それ以外にもそのような図形がある。軸平行という条件を拡張して、図形の面の法線ベクトルの成分が2箇所まで0でない場合についても立体角比和定理が成り立ちそうであるが、これは研究途中である。

　ここからは研究内容の厳密な証明や軸平行多面体に穴が空いている場合、すなわち単純な凸形状に限らず空洞やトンネル構造を含むようなより複雑な多面体構造についての考察を行っていく予定だ。また、それに加えてこの構造を3次元の場合に留まらずより高次元の場合へと拡張した場合の性質についても研究や議論を重ねていきたい。

6. 謝辞

　本研究の遂行にあたり秋田県立大学システム科学技術学部情報工学科准教授の草刈良至先生、本校数学教員の大橋俊文先生には多大なご助言、ご協力を賜りました。ここに感謝の意を示します。

7. 参考文献

[1] 秋山仁、離散幾何学フロンティア、近代科学社、2020.

[2]土谷 昭善、離散数学特論、東邦大学
https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/tsuchiya/Introduction%20to%20Enumerative%20Combinator

ics.pdf

[3] 東京科学大学デジタル創作同好会Trap、ピックの定理の多次元拡張-エルハート多項式-, https://trap.jp/post/1701/

[4]数研出版、3次元版ピックの公式について
https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/95/95-8.pdf

[5]ピックの定理の証明
https://manabitimes.jp/math/2842#3

[6]ピックの定理の証明 コップの水
https://okimath.com/pikku

[7]立体角とは
https://www.optics-words.com/sokkou/steradian.htm

[8]立体角の計算
https://www.optics-words.com/sokkou/steradian.html

[9]エルハート多項式について
https://zenn.dev/dannchu/articles/d1bb3cde46e717e257c7

[10]格子点数と体積 エルハート
https://hyogo-u.repo.nii.ac.jp/record/6247/files/M12150A-1.pdf