



Collatzの予想と数学的考察

秋田県立横手高等学校 理数科2年1組 数学2班

片岡 悠斗、佐藤 優大、高橋 勇輝、山田 朔

I, コラッツ(Collatz)の予想の概要

Collatzの予想とは...

「任意の正の整数 n に対して、

n が偶数のとき $\rightarrow n/2$

n が奇数のとき $\rightarrow 3n + 1$

この操作を繰り返すと、任意の初期値 n は1になる。」

具体例) $n = 3$ のとき

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

このときの「試行回数」を7回とする。

Collatzの予想とは...

- ・1937年にドイツの数学者ローター・コラッツによって提唱された問題。
- ・全ての正の整数について成り立つことは証明されておらず、数論の未解決問題となっている。
- ・現在 5×2^{60} までは反例がないことが確認済み。
- ・2011年大学入試センター試験数学ⅡB第6問で扱われた。

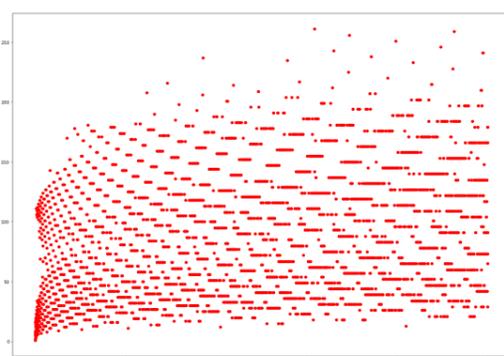
II, 研究動機

私たちは小学生でもできる程操作は簡単であるにも関わらず、未だ証明されていないこの問題に興味をもった。しかしこの問題の証明を私たちの限られた時間で行なうのは不可能だと考え、この問題の証明ではなく性質の追究を行うことにした。

III, 研究その①『初期値 n と試行回数に相関はあるか...』

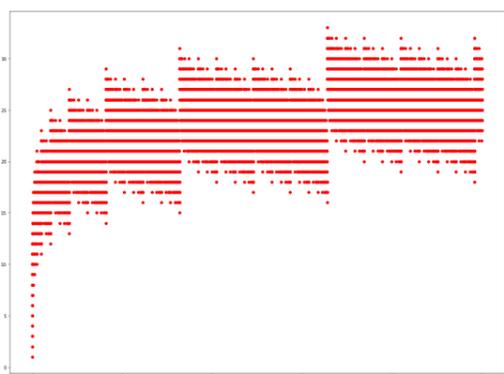
「初期値 n 」と「1に到達するまでの試行回数」にどのような関係があるか調べた。

プログラミング言語「Python」を用いて、横軸に初期値 n 、縦軸に試行回数をとって、グラフを作成した。



増加の操作を $3n + 1$ とした初期値 n と試行回数の散布図

←曲線が多数含まれているように見える



増加の操作を $n + 1$ とした初期値 n と試行回数の散布図

←直線が多数含まれているように見える

⇒他の増加に関する散布図も、(非)線形性が表れているのでは？

IV, 研究その②『俺らの予想を作る』

コラッツの予想のような予想を自分たちでも行いたいと考えた。

増加の操作を「 n が奇数のとき $\rightarrow n + 1$ 」

減少の操作を「 n が偶数のとき $\rightarrow n/2$ 」

とすると1以上 10^7 以下の範囲において1に到達。

⇒<仮説>

減少の操作を $n/2$ とする

$\alpha = p \times 2^m$ (但し p は正の奇数, m は0以上の整数)とし、

増加の操作を $\alpha(n + 1)$ とすると、必ず p に到達するのではないか。

<検証>

$p = 1$ のとき、上記の通り1以上 10^7 以下において1に到達。

$p = 3$ のとき、 10^7 以下において3に到達。

$p = 5, 7, 9, 11, \dots$ のとき、 p に到達しない場合があった。

<考察>

減少が増加に追いつかないのではないかと。

$2^1 < 3 < 2^2, 2^2 < 5 < 2^3, 2^3 < 9, 11 < 2^4$

平均何回2で割られる必要があるかに着目。

→ $p < 4$ の範囲なら平均1回だから成り立つ。

<結果>

俺らの予想はこのようになる!(上記のように α を設定する。)

「任意の正の整数に対して、奇数であれば1を足して α 倍し、偶数であれば2で割る、という操作を繰り返すと必ず正の奇数 p に到達する。

(但し、 $1 \leq n \leq 10^7, p = 1, 3$)」

V, 研究その③『操作の大枠に数論的条件は存在するか...』

操作を次のように一般化する:

「任意の正の整数 n に対して、

n が a の倍数のとき $\rightarrow n/a$

そうでないとき $\rightarrow bn + c$ 」

(但し、 a, b, c はすべて正の整数)

このとき、適当な非負整数 k があって、

・ $c = 1$ のみ。

・ a が素数の時、 $b = ak + 1$ 。

・ a が奇素数 p の累乗のとき、 $b = pk + 1$ 。

・ a が2より大きな2の累乗のとき、 $b = 4k + 1$ 。

・ a が2種類以上の素数の積のとき、 $b = ak + 1$ 。

(詳しい解説は配布資料を参照。)

VI, 謝辞

指導・協力: 武埜 章太 先生

参考: 豊田西高校-

<https://toyotanishi-h.aichi-c.ed.jp/education/ssh/ss-bu/sska10.pdf>

ご協力ありがとうございました。